

CHINA

曹荣理 著

导波光学中的 转移矩阵方法

上海交通大学出版社



上海交通大学“九五”重点教材

导波光学中的转移矩阵方法

曹庄琪 著

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书在介绍导波光学理论和转移矩阵技术的基础上,系统介绍了转移矩阵技术在各类光波导中的解析应用。内容涵盖多层波导、渐变折射率波导、周期性波导、多量子阱波导、泄漏波导、金属薄膜结构和金属覆盖波导,主要分析这些结构的色散特性。

本书可供理工院校光学、光电子技术和光纤通信等专业的研究生作为教材,也可作为有关专业研究人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

导波光学中的转移矩阵方法/曹庄琪著. - 上海:上海交通大学出版社,2000

ISBN 7-313-02440-1

I. 导… II. 曹… III. 转移函数矩阵-应用-波导光学 IV. TN25

中国版本图书馆·CIP 数据核字(2000)第 23624 号

导波光学中的转移矩阵方法

曹庄琪 著

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030)

电话:64071208 出版人:张天蔚

常熟市印刷二厂印刷 全国新华书店经销

开本:890mm×1240mm 1/32 印张:7 字数:199 千字

2000 年 9 月第 1 版 2000 年 9 月第 1 次印刷

印数:1~200

ISBN 7-313-02440-1/TN·083 定价:13.50 元

版权所有 侵权必究

序

随着光通信、光信息处理和光传感等技术的迅速发展,研究光在薄膜波导中调制、耦合、传输、放大、色散和非线性相互作用等现象的导波光学日益受到有关研究人员的重视。而导波光学领域内的研究成果对一系列薄膜光电子器件的发展也起到了巨大的推动作用。

曹庄琪同志自 1979 年进入上海交通大学应用物理系以后,师从我国著名的固体物理学家方俊鑫教授,从事集成光学和导波光学研究,至今已在这个学术领域辛勤耕耘 20 余年。他理论基础扎实,学术思想活跃,在光波导和表面等离子波研究领域建树颇多,已在国内外学术刊物上发表论文 60 余篇。尤其对光学上常用的转移矩阵理论的研究,有自己独到的见解,在美国光学学会杂志上发表的关于多量子阱光波导和渐变折射率光波导的论文曾获得国外专家的高度评价。最近,他在光波导高速开关和有机聚合物波导电光调制器领域又有新的思维,有关论文也将在美国光学学会杂志发表。

《导波光学中的转移矩阵方法》是一本学术专著,是作者利用转移矩阵方法研究多类光波导特性取得创造性成果的系统总结,内容覆盖多层薄膜波导、渐变折射率波导、周期性波导、多量子阱波导、泄漏波导、金属覆盖波导以及金属与介质界面上的表面等离子波。本书内容新颖、物理概念清晰、运用的数学工具简单,可作为理工科大学物理系和电子工程系光学和光电子专业研究生教材,也可供有关专业研究人员参考,相信本书的出版会对导波光学的教学和研究起到一定的作用。

丁 煦

CHINA

前 言

30 年来,以导波光学为理论基础的光纤技术、平面型光波导技术、集成光电回路及集成光路技术获得了迅速的发展。半导体薄膜激光器、电光波导调制器和多路光电开关等一大批实用化光电元器件正以迅猛的势头走向市场。人类从 20 世纪向 21 世纪过渡的同时,正在实现从电子学时代向光子学时代的飞跃。

矩阵技术是光学专家十分钟爱的一种理论方法,它在多层薄膜、周期性材料和变折射率光学元件等结构中,已获得广泛的应用。由于平面光波导是一种薄膜结构,因此利用转移矩阵方法分析各类光波导的特性是一种十分自然的想法。近 20 年来,国际上有多多个研究小组曾涉足这项技术,研究领域涵盖周期性波导、渐变折射率波导、量子阱和半导体超晶格等多种结构。由于电磁场波动方程与薛定谔方程的相似性,矩阵技术的应用还可扩展到势场中的粒子波。但在多数场合,矩阵技术仅被当作一种数值计算方法使用。物理量的数值计算可达到所期望的精确度,但缺少解析方法特有的洞察力,难以揭示实际问题蕴含的深刻物理本质。

70 年代末,笔者在方俊鑫教授的引导下,开始接触导波光学,至今已在这个全新领域耕耘 20 余年。多年的教学和科研工作,使我领悟到转移矩阵作为一个数学工具,其巨大的解析分析的潜力远未被开发和利用。作为一种尝试,我利用转移矩阵技术已在多层波导、渐变折射率波导、多量子阱波导、泄漏波导和金属覆盖波导等领域取得了一些初步的结果,其中大部分已总结成论文发表于国内外的学术刊物上。在许多同事和学生的建议和鼓励下,我觉得有必要对这些散乱的结果加以分析、总结和提高,编辑成一本学术著作。这一方面固然有利于有关专业研究生教学和科研工作的展开,同时也可起到抛砖引玉的作用。

在本书的编写过程中,我的学生刘晴、张爱华、袁波和黄澍帮我完

成了全部文字和图表的计算机输入工作,在此向他们表示衷心的感谢。由于本人学术水平有限,对书中的差错和不当之处,恳请广大读者批评指正。

曹庄琪

1999 年 12 月于上海交通大学

目 录

第 1 章 介质平板波导基础理论	1
1.1 引言	1
1.2 平板波导的线光学模型	2
1.3 平板波导的电磁理论.....	15
第 2 章 转移矩阵理论	30
2.1 引言.....	30
2.2 转移矩阵及其基本性质.....	30
2.3 模式本征方程.....	41
第 3 章 多层平板波导	43
3.1 引言.....	43
3.2 非对称多层平板波导.....	43
3.3 对称多层平板波导.....	49
3.4 多沟道波导.....	56
第 4 章 渐变折射率波导	67
4.1 引言.....	67
4.2 光线近似方法.....	68
4.3 WKB 近似法	71
4.4 WKB 方法的近似实质	79
4.5 等效衰减系数方法.....	81
4.6 精确的分析矩阵方法.....	88
第 5 章 周期性波导	98
5.1 引言.....	98
5.2 矩形皱阶周期性波导.....	98
5.3 任意形状皱阶周期性波导	110
第 6 章 多量子阱光波导	121

6.1	引言	121
6.2	阶跃折射率分布多量子阱光波导	121
6.3	任意折射率分布多量子阱光波导	128
6.4	分层复合材料中的非线性增强效应	139
第 7 章	泄漏波导	147
7.1	引言	147
7.2	棱镜—波导耦合系统	147
7.3	弯曲波导	155
第 8 章	金属薄膜结构	171
8.1	引言	171
8.2	金属与介质界面中的表面等离子波 (SPW)	171
8.3	金属薄膜结构	179
8.4	表面等离子波的应用	187
第 9 章	金属包覆介质波导	193
9.1	引言	193
9.2	非对称金属包覆介质波导	193
9.3	对称金属包覆介质波导	202
9.4	金属包覆介质波导中的长程表面波	208

第 1 章 介质平板波导基础理论

1.1 引言

介质光波导是在光波导器件和集成光路中用以限制和传播光的元件,一种为大家熟知的介质光波导就是通常具有圆形截面的光导纤维。然而,集成光学所注重的波导往往是平面薄膜所构成的平板波导。这一方面固然是由于平板波导几何形状简单,其导模和辐射模可以用简单的数学公式来描述,另一方面是由于平板波导是最常用最基本的介质光波导,因此本书将只讨论这种平板波导。

介质平板波导的结构如图 1.1 所示,它由三层材料组成。中间一层是折射率为 n_1 的波导薄膜,它淀积在折射率为 n_2 的衬底上,薄膜上层是折射率为 n_3 的覆盖层(或称包层)。薄膜的厚度一般为 μm 量级,可与光波长相比较。为了构成真正的波导,要求 n_1 必须大于 n_2 和 n_3 。不失一般性,可假定, $n_1 > n_2 \geq n_3$, 如果 $n_2 =$

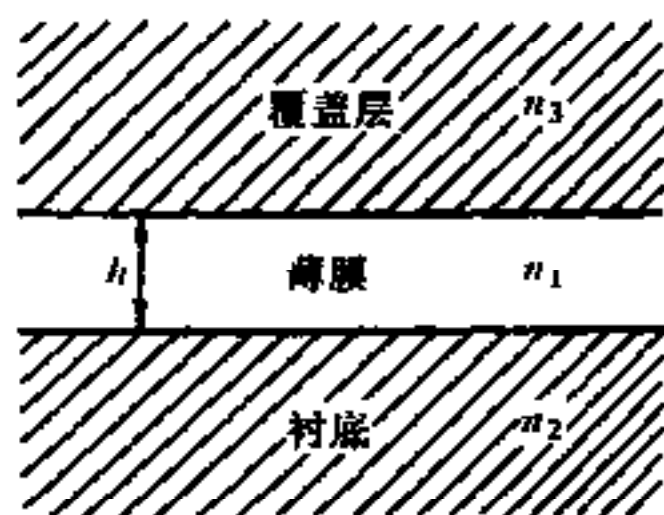


图 1.1 介质平板波导结构

n_3 , 则称该波导为对称平板波导,如果 $n_2 \neq n_3$, 则波导是非对称的。

由于对称平板波导仅仅是平板波导的特殊情况,故本章专门叙述非对称平板波导的光学性质。首先介绍光在平板波导中传播的线光学图像,使读者对介质平板波导有一个基本的认识,然后再利用光的电磁理论较为严格地处理光波导模式及场分布等基本性质,为以下几章奠定必要的理论基础。

本章始终假定导波光为相干单色光,并假定光波导是由无损耗、各向同性、非磁性的无源介质构成。

1.2 平板波导的线光学模型

本节讨论和研究光在平板波导中传播的线光学模型,并利用这个模型介绍介质波导理论的基本概念和术语,其中包括传播模的性质、导模、传播常数、导模的截止以及波导的有效厚度等。线光学图像是一种简明直观的模型,但值得指出的是,为了解释波导中光的传播特性,还必须引入位相和相干等波动概念,再配以波导中锯齿光线传播的模型,这样才能得到光波导的色散方程和分立导模的结果。因为导波光是准一维平面波,本节介绍的线光学模型是讨论介质平板波导时所特有的。

光在平板波导中传播的图像,是光线在薄膜—衬底和薄膜—覆盖层分界面上发生全内反射,而在薄膜中沿 Z 字形路径传播的图像。鉴于发生在这些介质界面上的折射和反射在导波光传播过程中起着重要作用,所以下面将简要分析折射与反射的物理过程,同时回顾有关的定律及其一些推论。

1.2.1 反射与折射^[1.1]

光通过两种不同的介质时,发生反射和折射现象。反射光与折射光是由以下过程所产生的:光透射到第二介质的一个薄层内完全地被吸收,透射的薄层厚度称为透射深度。被吸收的能量激起该介质内分子或原子电矩的受迫振动,产生瑞利散射。散射出来的瑞利次波相干后,在特征方向上给出极大值,这就是所观察到的反射光与折射光。因此,透射是第一性的,反射和折射是派生的,即第二性的。当光从光密介质射向光疏介质,而入射角大于临界角时,所出现的全反射并不是真正的“完全”反射。首先光必须透射,在不同的条件下,具有不同的透射深度;其次,全反射出来的光,在不同的条件下,经历着不同的相位突变和偏振变化。由此可见,光的反射与折射具有深刻的物理内容,它是光与界面物质相互作用的结果。

考虑如图 1.2 所示的分界面,其两侧是折射率分别为 n_1 和 n_2 ($n_2 < n_1$) 的两种无损耗、各向同性的均匀介质。由 n_1 介质向分界面入射一

相干光波,其波阵面法线与分界面法线成 θ_1 角。一般说来,具有复振幅 A 的光在分界面上,一部分被反射,一部分被折射。根据斯奈尔(Snell)定律,折射光的出射角 θ_2 (即通常所说的折射角)由下式给出:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (1.1)$$

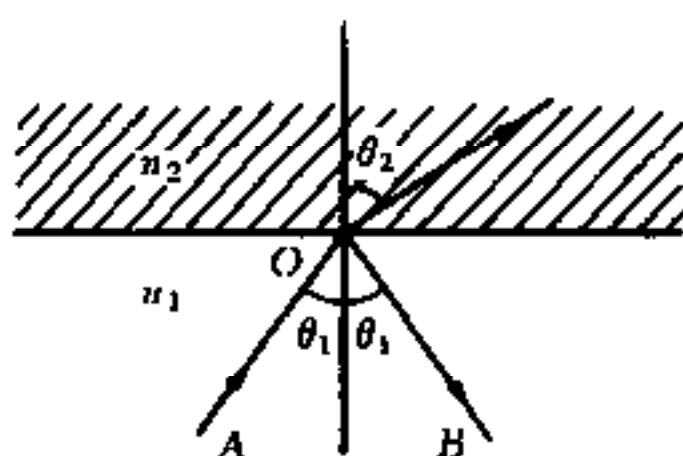


图 1.2 光线在两介质间的分界面上的反射和折射

反射光具有复振幅 B , 在分界面处它与 A 通过反射系数 r 呈线性关系:

$$B = rA \quad (1.2)$$

反射系数的大小取决于入射角和光的偏振态,由菲涅耳公式给出。对 TE 偏振(即电场垂直于波阵面法线和分界面法线构成的入射面),则有

$$r_{TE} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}}{n_1 \cos \theta_1 + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}} \quad (1.3)$$

对于 TM 偏振(即磁场垂直于入射面),相应的公式为:

$$r_{TM} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} = \frac{n_2^2 \cos \theta_1 - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}}{n_2^2 \cos \theta_1 + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}} \quad (1.4)$$

临界角 θ_c 由下式给出:

$$\sin \theta_c = n_2 / n_1 \quad (1.5)$$

若 $\theta_1 < \theta_c$, 则光只有部分被反射, r 取实数,一旦入射角超过临界角($\theta_1 > \theta_c$), 则 $|r| = 1$, 于是发生光的全反射。这时, 反射光产生相移, r 取复数, 可写为

$$r = \exp(-i2\phi) \quad (1.6)$$

因此可以从菲涅耳公式中推出与两偏振态对应的相移 ϕ_{TE} 和 ϕ_{TM} , 其

表达式分别为

$$\tan \phi_{\text{TE}} = \frac{\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}}{n_1 \cos \theta_1} = \sqrt{\frac{\beta^2 - k_0^2 n_2^2}{k_0^2 n_1^2 - \beta^2}} \quad (1.7)$$

$$\tan \phi_{\text{TM}} = \frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}}{n_1 \cos \theta_1} = \frac{n_1^2}{n_2^2} \sqrt{\frac{\beta^2 - k_0^2 n_2^2}{k_0^2 n_1^2 - \beta^2}} \quad (1.8)$$

式中, $\beta = k_0 n_1 \sin \theta_1$; $k_0 = 2\pi/\lambda$, λ 是入射光的波长。

图 1.3 画出了 ϕ_{TE} 对入射角 θ_1 的依赖关系。从图中可以看出, 相移从临界角时的 0 增加到掠入射角 ($\theta_1 = 90^\circ$) 时的 $\pi/2$ 。当 $\theta_1 = \theta_c$ 时, 曲线的斜率增至无穷大; 当 $\theta_1 = 90^\circ$ 时, 曲线的斜率为 $(1 - n_2^2/n_1^2)^{-1/2}$ 。 ϕ_{TM} 的变化性质与之十分相似, 故不再重复。

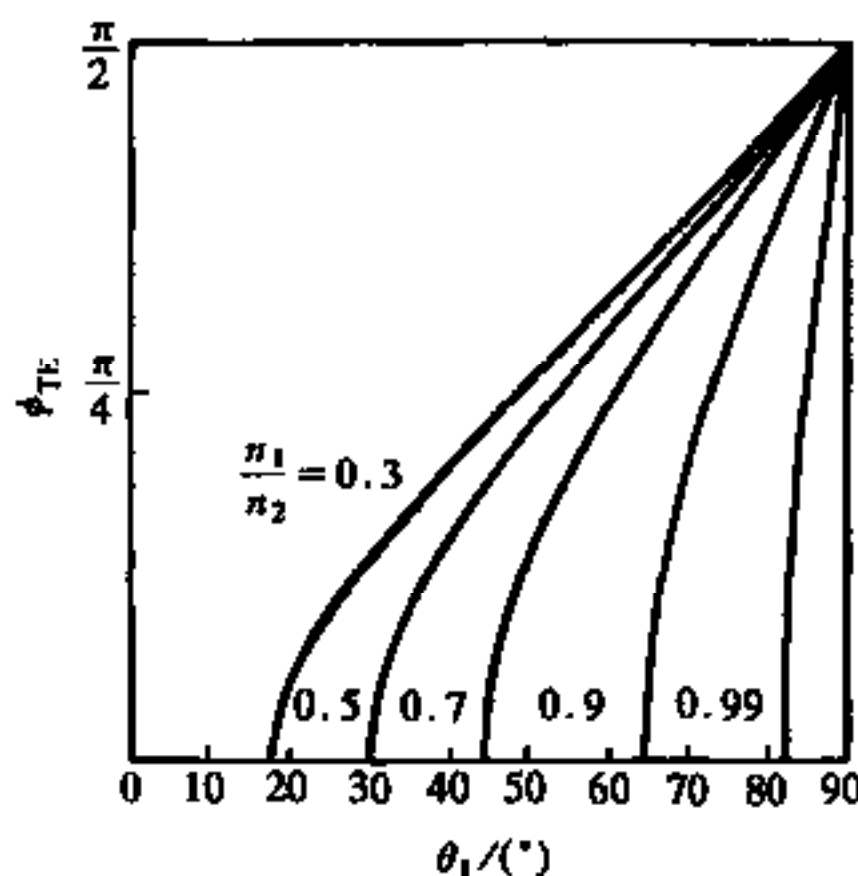


图 1.3 TE 模的相移 ϕ_{TE} 作为入射角 θ_1 的函数的曲线图

1.2.2 平板波导的模式

考虑图 1.4 所示的非对称平板波导结构, 其中薄膜的折射率为 n_1 , 衬底和覆盖层的折射率分别为 n_2 和 n_3 , 且设 $n_1 > n_2 > n_3$ 。薄膜—衬底分界面上的全反射临界角设为 θ_s , 而薄膜—覆盖层分界面上的全反射临界角设为 θ_c , 显然; $\theta_c < \theta_s$ 。当入射角 θ 逐渐增大时, 经分析可知, 存在着三种不同的情况, 如图 1.4 所示: (a) 对应于入射角 θ 小

的情况,即 $\theta < \theta_c < \theta_s$,从衬底一侧入射的光按照菲涅耳定律进行折射,并穿过覆盖层从波导逸出。此时,光没有受到限制,相应于这一图像的电磁模式称为“辐射模”(或称“包层模”)。(b)如图所示,入射角 θ 略为增大,使其满足 $\theta_c < \theta < \theta_s$ 。这时,自衬底入射的光在薄膜—衬底分界面上被折射,而在薄膜—覆盖层分界面上全反射,然后再发生折射,回到衬底,并最终逸出波导。这时,光仍然没有受到限制。这种传播方式称为“衬底辐射模”。(c)当入射角 θ 足够大时,满足 $\theta_c < \theta_s < \theta$ 。也就是光在两个分界面上都发生全反射,光一旦进入薄膜后就被封闭在里面沿 Z 字形路径传播。这种情况对应于传播的“导模”。

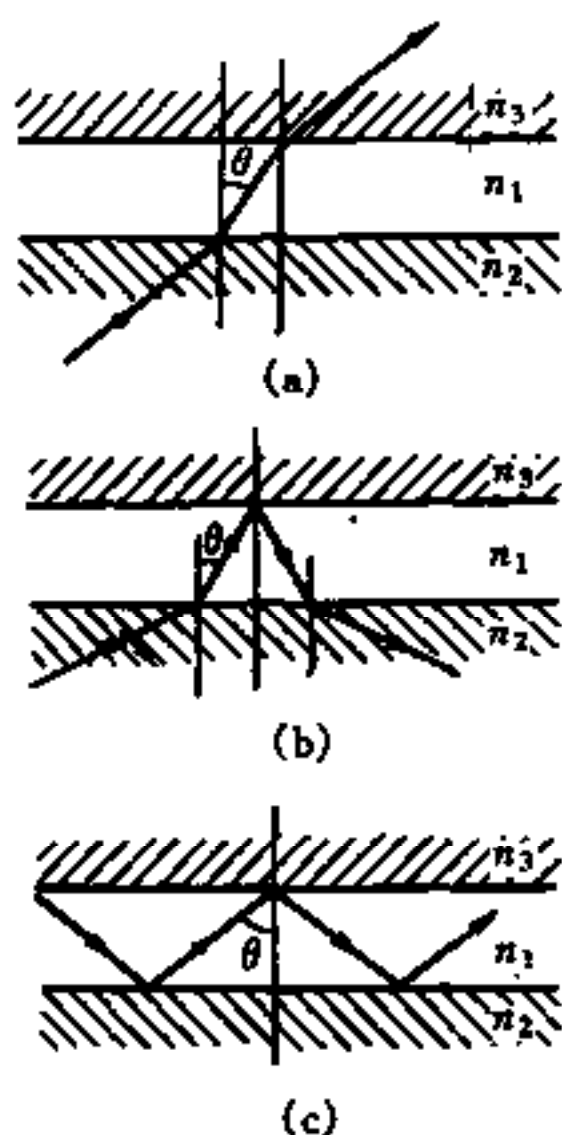


图 1.4 在平板波导中的图像

根据波动理论,在垂直于分界面方向上,导模在薄膜内形成驻波,而在覆盖层和衬底中形成指数衰减的迅衰波。以后还将会看到,并不是所有满足 $\theta > \theta_s > \theta_c$ 的光线都能在波导中传播,并构成导模。实际上,构成导模的 θ 角只能是有限个离散值,因此,导模属离散谱。而包层辐射模和衬底辐射模的 θ 角可取无限多个连续值,因此,辐射模属连续谱。

由于导模是实际在光波导中传播的光波,它是研究所有光波导器件的基础,因此以下将着重研究导模。

1.2.3 平板波导的导模

图 1.5 表示了平板波导的侧视图及坐标系,图中画出了对应于导模的 Z 字形波的波阵面。前面已指出,平板波导的导模可以用锯齿形光线图像描述,并且锯齿光线与界面法线的夹角 θ 只能取有限个离散值。设波导中的光沿坐标 z 方向传播,而在 x 方向受到限制。至于在垂直于 xz 平面的 y 方向上,由于波导的尺寸相对比较大,所以在理论上认为平板波导的几何结构和折射率分布沿 y 方向是不变的,并可进

一步认为光场沿 y 方向也是均匀一致的。于是可以看出,锯齿光线实际上是两个重叠的均匀平面波的图像,一个是斜向上传播的,另一个是斜向下传播的,其波阵面法线是图 1.5 所示的锯齿形光线。设这两个平面波是单色并相干的,其角频率为 ω ,自由空间的波长为 λ ,则自由空间的波数为:

$$k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda \quad (1.9)$$

式中, c 为真空中的光速。图 1.5 所示的平面波的波矢量为:

$$|k| = k_0 n_1 \quad (1.10)$$

$$\kappa = k_0 n_1 \cos\theta \quad (1.11)$$

$$\beta = k_0 n_1 \sin\theta \quad (1.12)$$

式中, κ 和 β 分别为波矢 k 的 x 分量和 z 分量。由此可见,薄膜中的波动场按以下方式变化:

$$\exp[i(\pm \kappa x + \beta z)] \quad (1.13)$$

式中, κ 前面的正负号分别对应于斜向上和斜向下传播的平面波。考察某一 z 为常数的波导截面,这时只能看到光波沿 x 方向的上下运动,因而可不考虑光波沿 z 方向的运动,以下从这个观点出发推导平板波导维持导模的条件,设一光波从薄膜下界面($x=0$)出发向上行进到薄膜上界面($x=h$),在上界面经历全反射后返回到下界面,在下界面又经历全反射后与原先从下界面出发的光波叠加在一起,将此过程中光波所经历的相移累加起来,可以看到,为了达到相干加强(谐振)的结果,这个相移累加总和必须是 2π 的整数倍。对于厚度为 h 的薄膜,光线第一次横向穿过薄膜的相移是 κh ,在薄膜—覆盖层分界面上的全反射相移是 $-2\phi_{13}$,另一次向下横穿薄膜的相移也是 κh ,在薄膜—衬底分界面上的全反射相移是 $-2\phi_{12}$ 。因此,光波能在薄膜中传播的条件,即平板波导能维持导模的条件是

$$2\kappa h - 2\phi_{13} - 2\phi_{12} = 2m\pi \quad (1.14)$$

式中, m 为模序数,它取从零开始的有限个正整数。相移 ϕ_{12} 和 ϕ_{13} 是

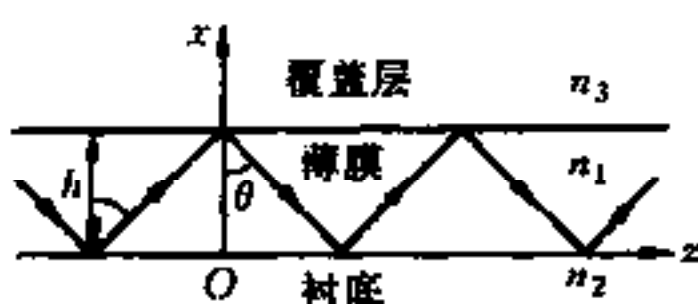


图 1.5 平板波导的俯视图

由式(1.7)和(1.8)所描述的角度 θ 的函数。由此可看出, 只有满足方程(1.14)的入射角 θ 才为波导所接受, 即波导对光线的入射角是有选择性的。在厚度 h 确定的情况下, 平板波导所能维持的导模数量是有限的, 因此 m 只能取有限个正整数。方程(1.14)称为平板波导的模式本征方程, 该方程的未知数是 β 或 θ 。对于给定的 m , 一定有 β_m 或 θ_m 与之对应。 β_m 叫作 m 阶导模的传播常数, θ_m 叫作 m 阶导模的模角。当然上述方程也可以表示成光频 ω 与传播常数 β 的关系, 故上式也称为平板波导的色散方程。

将式(1.7)和(1.8)代入方程(1.14), 可得到与两种偏振态有关的平板波导模式本征方程。

对 TE 模, 有

$$\kappa h = m\pi + \arctan\left(\frac{p}{\kappa}\right) + \arctan\left(\frac{q}{\kappa}\right) \quad (1.15)$$

式中,

$$\kappa = (k_0^2 n_1^2 - \beta^2)^{1/2} \quad (1.16)$$

$$p = (\beta^2 - k_0^2 n_2^2)^{1/2} \quad (1.17)$$

$$q = (\beta^2 - k_0^2 n_3^2)^{1/2} \quad (1.18)$$

对 TM 模, 有

$$\kappa h = m\pi + \arctan\left(\frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{p}{\kappa}\right) + \arctan\left(\frac{n_1^2}{n_3^2} \frac{q}{\kappa}\right) \quad (1.19)$$

由式(1.5)和(1.12)可以看出, 导模的传播常数 β 介于平面波在衬底和薄膜的波数之间, 即有

$$k_0 n_2 < \beta < k_0 n_1 \quad (1.20)$$

为了方便, 定义波导的有效折射率

$$N = \beta/k_0 = n_1 \sin\theta$$

N 又可称为模折射率或模指数, 根据式(1.20), 可知它的取值范围是

$$n_2 < N < n_1 \quad (1.21)$$

利用有效折射率, 可将平板波导的模式本征方程改写成意义更明确的形式, 即

TE 模:

$$(n_1^2 - N^2)^{1/2} k_0 h = m\pi + \arctan\left(\frac{N^2 - n_2^2}{n_1^2 - N^2}\right)^{1/2} + \arctan\left(\frac{N^2 - n_3^2}{n_1^2 - N^2}\right)^{1/2} \quad (1.22)$$

TM 模:

$$(n_1^2 - N^2)^{1/2} k_0 h = m\pi + \arctan\left[\left(\frac{n_1^2}{n_2^2}\right)\left(\frac{N^2 - n_2^2}{n_1^2 - N^2}\right)^{1/2}\right] + \arctan\left[\left(\frac{n_1^2}{n_3^2}\right)\left(\frac{N^2 - n_3^2}{n_1^2 - N^2}\right)^{1/2}\right] \quad (1.23)$$

这些不同形式的平板波导模式本征方程可用来研究波导的各种不同性质。

1.2.4 平板波导的传播常数

为了研究光在平板波导中的传播特性,必须根据模式本征方程(1.15)和(1.19)求得导模的传播常数。本小节将讨论平板波导模式本征方程的图解方法和数值分析方法,并通过实例说明光在平板波导中传播的图像。

(1) 模式本征方程的图解方法 对于平板波导中的基模($m=0$),模式本征方程(1.15)或(1.19)变为

$$\kappa h = \phi_{12} + \phi_{13} \quad (1.24)$$

若波导是对称的,即 $n_2 = n_3$, 则 $\phi_{12} = \phi_{13}$, 于是上式化为

$$\kappa h = 2\phi_{13} \quad (1.25)$$

图 1.6 表示对称和非对称波导基模的模式本征方程图解。图中画出了关于 θ 角的两种相移曲线,即光在薄膜中的横向穿越相移 $k_0 n_1 \cos\theta \cdot h$ (图中以点线画出)和光在薄膜上下分界面上的全反射相移之和($\phi_{12} + \phi_{13}$)。下面就($\phi_{12} + \phi_{13}$)的两种情况,即 $\phi_{12} = \phi_{13}$ 的对称波导(图中以实线画出)和非对称波导(图中以虚线画出)分别加以分析。对于对称波导,图中实线和点线的交点给出了基模的 Z 字形路径的 θ 角值。随着 h/λ 变得越小, Z 字形就显得越尖锐(θ 角越小)。但是,尽管薄膜厚度取得很小(或光波长很长),也总存在着一个解。这就

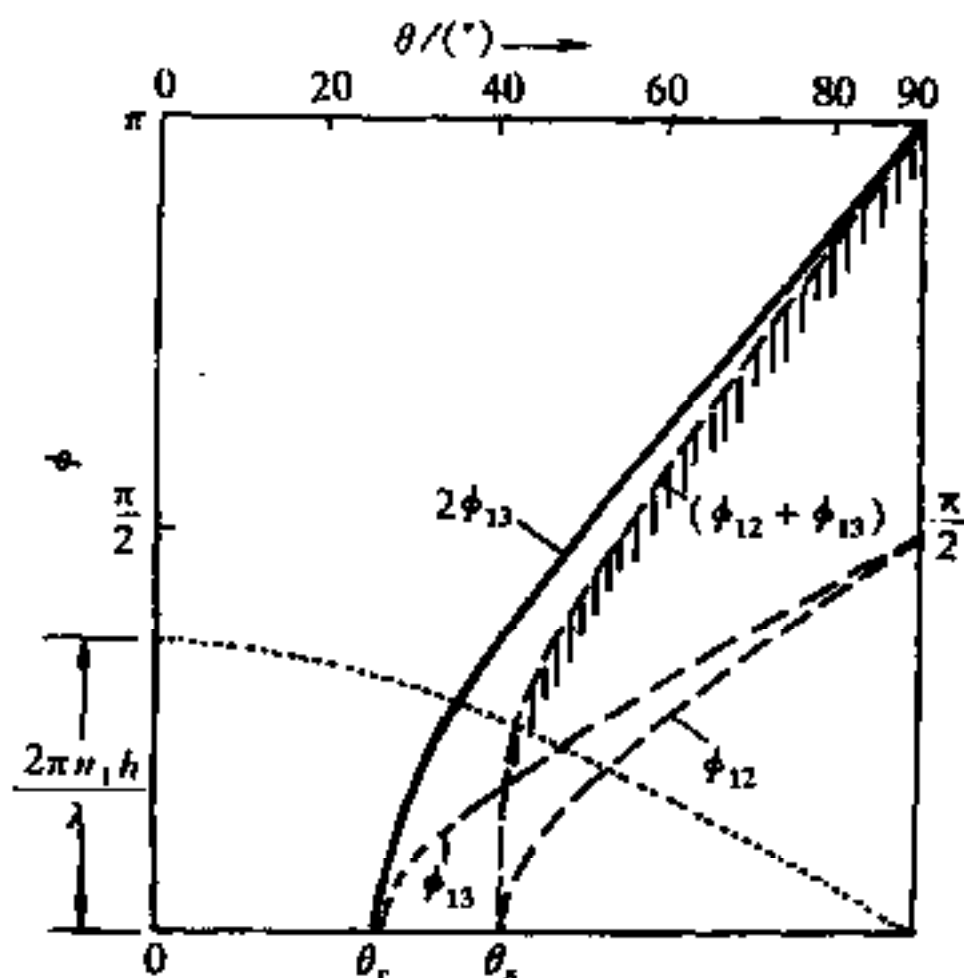


图 1.6 平板波导的基模的色散方程图解示意图

意味着,对称平板波导的基模是不会截止的。对于非对称平板波导,从图上考察点线与虚线之间的交点,可以看到,在 $(\phi_{12} + \phi_{13})$ 曲线中只有用阴影线表示的那一部分才大于薄膜—衬底分界面上的临界角 θ_s 。于是,对于较薄的薄膜(或较长的波长),无法得到点线和虚线的交点。这意味着非对称平板波导并不总能维持导模,即使是基模,也存在着截止条件 $\beta = k_0 n_2$ 。

下面研究多模的情况。以 TE 模为例,把平板波导模式本征方程(1.15)改写为

$$\tan(\kappa h) = \frac{\kappa(p + q)}{\kappa^2 - pq} \quad (1.26)$$

利用关系式

$$p = [k_0^2(n_1^2 - n_2^2) - \kappa^2]^{1/2} \quad (1.27)$$

$$q = [k_0^2(n_1^2 - n_3^2) - \kappa^2]^{1/2} \quad (1.28)$$

可将式(1.26)的右端改写为

$$F(\kappa h) = \frac{\kappa h \{ [(n_1^2 - n_2^2)(k_0 h)^2 - (\kappa h)^2]^{1/2} + [(n_1^2 - n_3^2)(k_0 h)^2 - (\kappa h)^2]^{1/2} \}}{(\kappa h)^2 - [(n_1^2 - n_2^2)(k_0 h)^2 - (\kappa h)^2]^{1/2} [(n_1^2 - n_3^2)(k_0 h)^2 - (\kappa h)^2]^{1/2}} \quad (1.29)$$

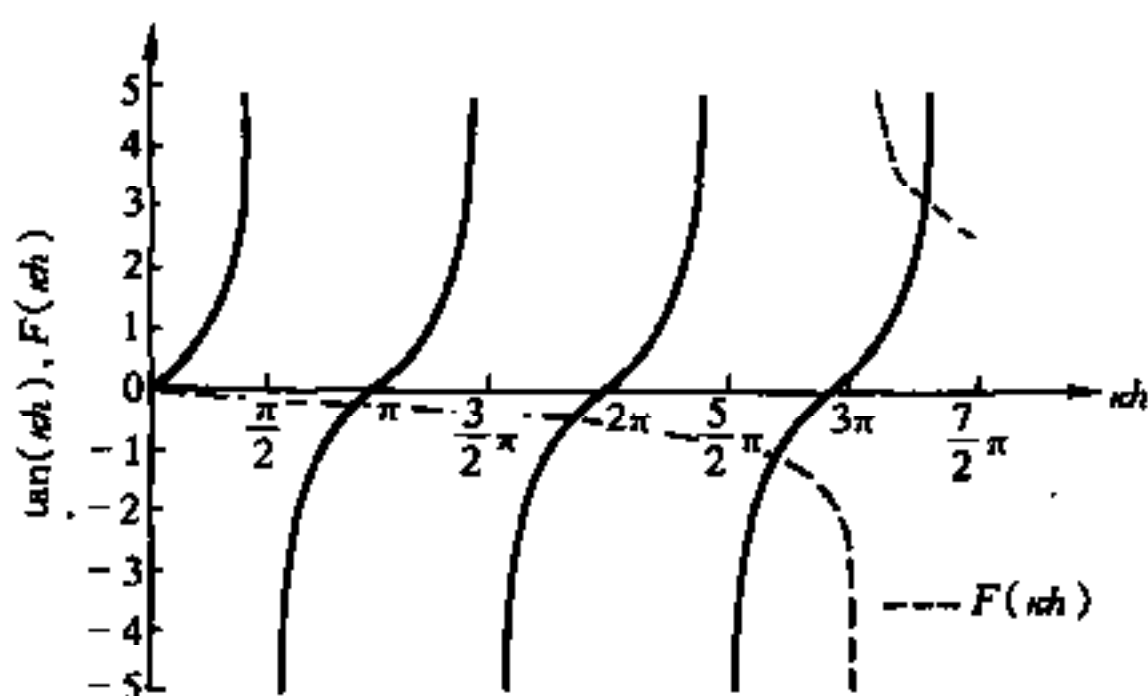


图 1.7 本征值方程(1.26)的图解

图 1.7 为方程(1.26)的图解,图中实线表示 $\tan(kh)$ 和 (kh) 的关系,虚线表示 $F(kh)$ 和 (kh) 的关系。实线与虚线的交点给出模式本征方程的解。由这些交点可以得到一系列 $(\kappa_m h)$ 值,再利用关系式 $\kappa_m^2 + \beta_m^2 = k_0^2 n_1^2$,可得到导模的传播常数 β_m 。绘制图中这些曲线时,使用的参数为 $(n_1^2 - n_2^2)^{1/2} k_0 h = 11$ 和 $(n_1^2 - n_3^2)^{1/2} k_0 h = 24$,使式(1.29)的分母为零的点是曲线 $F(kh)$ 的极点。而曲线 $F(kh)$ 在下式解出的点上终止,即

$$\kappa h = (n_1^2 - n_2^2)^{1/2} k_0 h \quad (1.30)$$

这是因为当 κh 超过式(1.30)给定的数值时,式(1.29)中两个平方根的表达式之一将变成虚数。在图 1.7 中,实线与虚线有 4 个交点,它们对应于波导所承载的 4 个 TE 模。为了更好地理解平板波导模式本征方程的性质,定义参量

$$V = (n_1^2 - n_2^2)^{1/2} k_0 h \quad (1.31)$$

随着 V 值的减小,虚线的终止点向左移动,实线与虚线的交点数目减小,表示导模的数量减少。当 V 足够小时,虚线的终止点移向第一个正切曲线分支的左边,这时虚线与实线没有交点。这意味着,当薄膜厚度 h ,光频 ω 和折射率的平方差 $(n_1^2 - n_2^2)$ 都足够小时,波导不能承载导模。但对于对称平板波导,虚线的终止点落在 κh 轴上,即当 $V = \kappa h$ 时, $F(kh) = 0$,虚线至少与第一个正切曲线分支相交,因此至少存在一

个导模。这意味着对称平板波导的基模不会截止,这与前面的结论一致。

(2) 模式本征方程的数值解

平板波导的模式本征方程除了用图解法求解外,还可以用数值方法求解。根据数值解绘制出的平板波导色散特性曲线,可用来讨论光在平板波导中的传播特性,也可供波导设计和测量使用。图 1.8 是根据数值解画出的有效折射率 N 对波导薄膜厚度 h 的关系曲线。而图 1.9 是光频 ω 对传播常数 β 的关系曲线。在这两个图中,只画出了前三个低阶模的色散曲线,但都标出了截止厚度和截止频率。由图 1.8 可以看到,当 h 等于截止厚度时,有效折射率 N 等于衬底折射率 n_2 。当 h 增大时, N 随着增大,但趋于一个上限值 n_1 (薄膜折射率)。显然, h 增大时,模式数量随之增多。图中

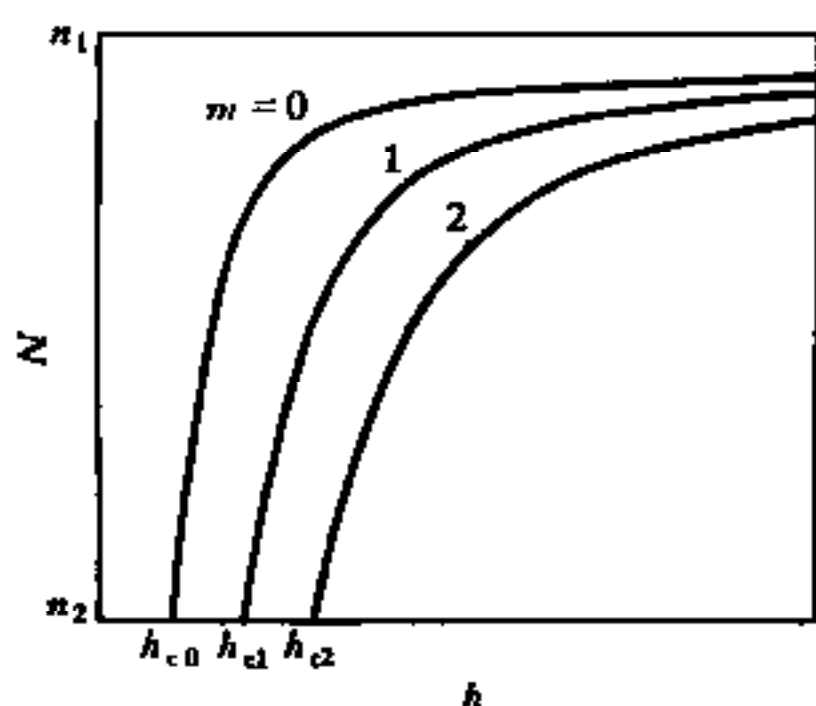


图 1.8 平板波导 N 对 h 的曲线

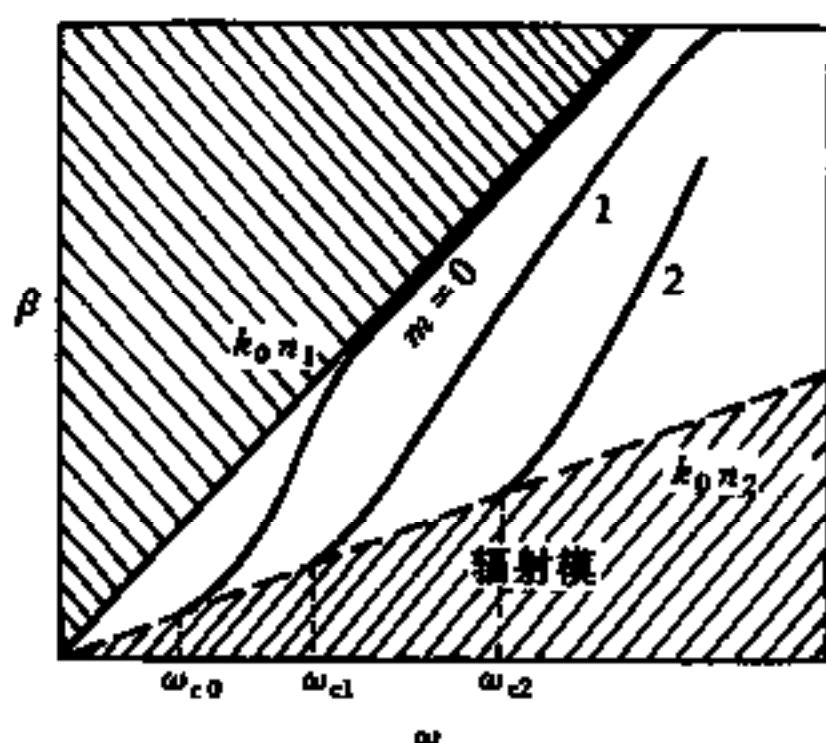
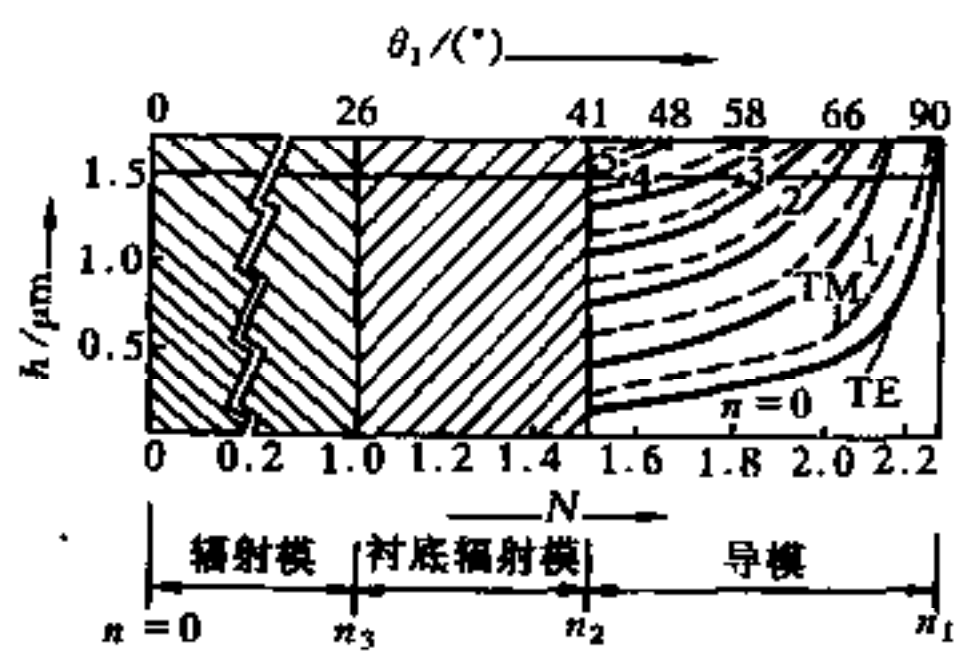


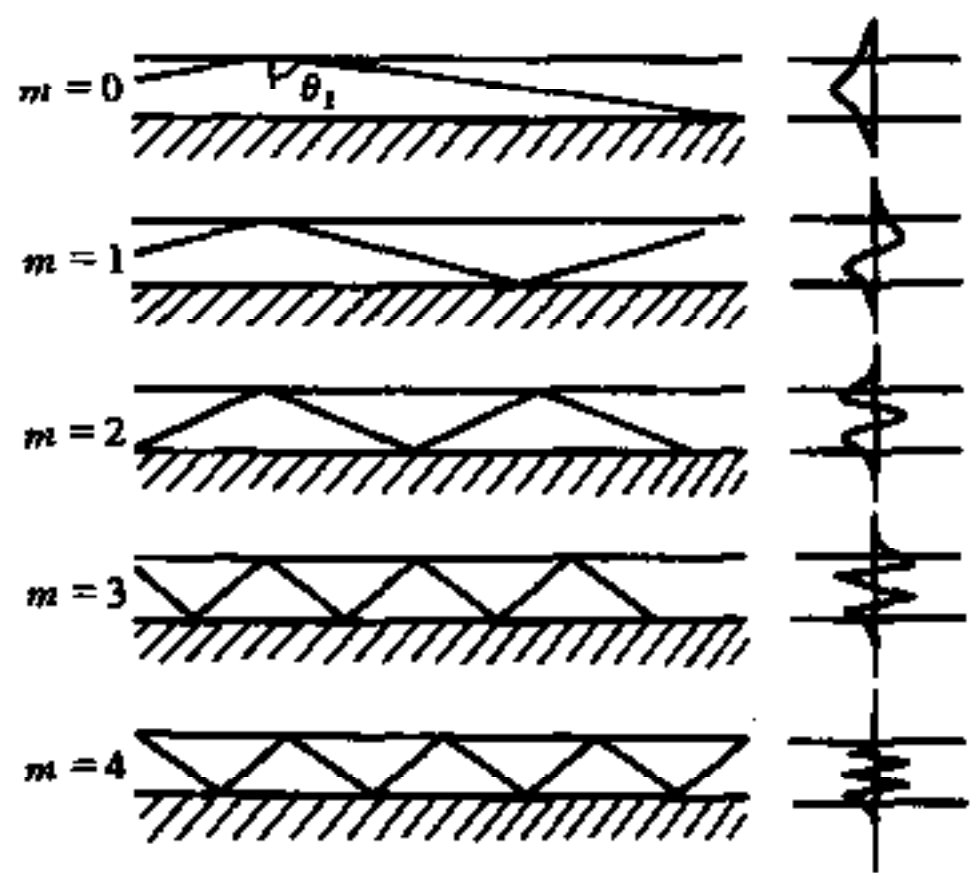
图 1.9 平板波导 β 对 ω 的曲线

个导模的截止厚度。由图 1.9 可以看到,在截止频率处,传播常数取下限值 $k_0 n_2$ 。当 ω 增大时, β 趋向于上限值 $k_0 n_1$ 。同样,随着频率 ω 的增大,模式数量也随之增加。图中 ω_{c0} 、 ω_{c1} 、 ω_{c2} 分别是 m 为 0、1、2 三个导模的截止频率。图 1.9 除画出了导模的分立谱外,还画出了辐射模的连续谱。

(3) 实例 一平板波导由一玻璃基板上沉淀一层 $1.5\mu\text{m}$ 厚的 ZnS 薄膜构成。如果采用 $1.06\mu\text{m}$ 的 Nd:YAG 激光波长,则该波导的参数分别为 $n_1=2.2899$, $n_2=1.5040$, $n_3=1.0000$, $k_0=5.9270 \times 10^{-4}\text{cm}^{-1}$ 。



(a)



(b)

图 1.10 (a) ZnS 玻璃波导的模式色散曲线;
(b) 每一模式对应的锯齿波和场分布

在此波导中,可以承载 5 个 TE 模和 5 个 TM 模。表 1.1 所示为 TE 模,注意 $m=0$ 的基模的模折射率和入射角,它们分别接近于 n_1 和 90° ,而 $m=4$ 的模式的模折射率和入射角则接近于 n_2 和薄膜—衬底分界面上的全反射临界角 $\theta_s = \arcsin(n_2/n_1) = 41.6^\circ$ 。图 1.10(a)表示 ZnS 波导的模式色散曲线,图中每一条曲线表示一个波导模式,实线和虚线分别表示 TE 模和 TM 模,图 1.10(b)表示每一模式对应的锯齿波和场分布。下面分析这些模式曲线。

表 1.1 玻璃波导中的 TE 模

模序	模折射率	入射角 $\theta_1 / (^\circ)$
0	2.264	81.4
1	2.201	74.0
2	2.086	65.6
3	1.916	56.8
4	1.685	47.4

① 从薄膜厚度 h 的任一给定值上,画一水平线,此水平线与模式曲线的交点给出模折射率 N 和入射角 θ_1 的值。可以看到 $m=0$ 的模式具有最大的 N 和 θ_1 ,而对较高模序的模式来说, N 和 θ_1 的数值较小。

② 随着薄膜厚度 h 的增加,水平线将向上移动,这时将相交更多的模式曲线,表示波导将容纳更多的导模。

③ 所有的模式曲线在左边始于 $N=n_2$,在右边始于 $N=n_1$,而且它们是单调递增的函数。因此模式曲线在 $N=n_2$ 处所对应的薄膜厚度是为了让该导模在波导中传播所要求的最小厚度,称为“截止厚度”。例如,当水平线的位置选在 $h=1.50\mu\text{m}$ 时,由于 $m=5$ 模式的截止厚度是 $1.60\mu\text{m}$,因此这一模式在该波导中是截止的。然而,所有小于 $m=5$ 的模式的截止厚度都小于 $1.50\mu\text{m}$,因而它们是该波导所能承载的模式。

④ 在 $N=n_2$ 处, $\theta_1 = \arcsin(n_2/n_1) = \theta_s$,这就是薄膜—衬底分界面上的全反射临界角。当 θ_1 小于此临界角时,所有的导模都截止。这是一个只有包层模和衬底模能够存在的区域。

⑤ 从图可以看出,同一模序数的 TM 模的模折射率小于 TE 模的模折射率。

1.2.5 古斯—汉欣(Goos-Hanchen)位移和波导有效厚度

在以前的讨论中,认为入射光抵达界面时,入射和反射在同一点发生,只产生一个相移,实际上却不然。古斯和汉欣在 1947 年作了一个实验,证明反射点离入射点有一段距离,并给出定量的公式。所谓古斯—汉欣位移,即实际反射点与理想反射点之间的距离

$$D = \frac{cn_2\lambda}{(n_1^2 \sin^2 \theta - n_2^2)^{1/2}} \quad (1.32)$$

式中, c 为常数, 当 $n_1 = 1.52, n_2 = 1$ 时, $c = 0.52$; λ 为光波长。这个现象的出现是基于实际光线都具有一定的空间谱宽, 也即实际上的光线由一光束构成, 它们指向同一入射点, 但入射角有一角宽度 $\Delta\theta$ 。

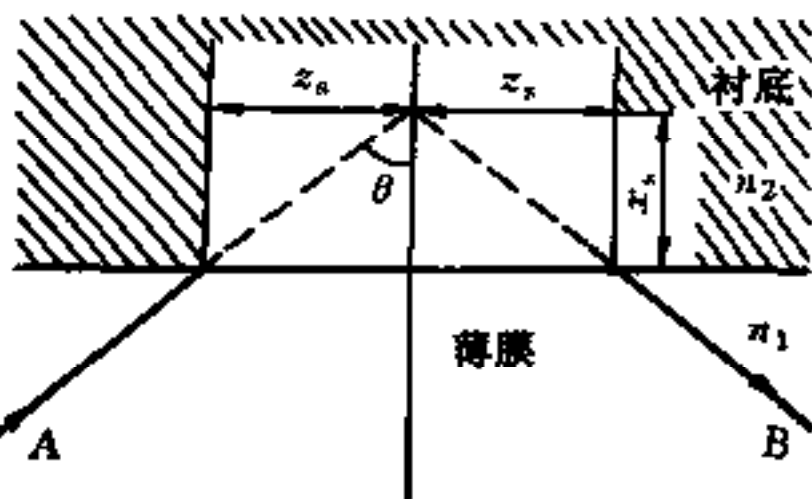


图 1.11 在界面上全反射的光线图像

为了确定图 1.11 所示的光线纵向位移 $2z_s$ 的大小, 现研究两个人射角稍有不同的平面波组成的简单波包。如果相应波矢的 z 分量分别为 $\beta \pm \Delta\beta$, 则入射波包在 $x=0$ 的分界面的复振幅为

$$A(z) = [\exp(i\Delta\beta z) + \exp(-i\Delta\beta z)] \exp(i\beta z) = 2\cos(\Delta\beta z) \exp(i\beta z) \quad (1.33)$$

在应用反射定律(1.2)和(1.6)到每个平面波之前, 必须考虑到, 反射时出现的相移 ϕ 是 θ (或 β) 的函数。对于 $\Delta\phi$ 和 $\Delta\beta$ 都很小的情况, 可以用微分公式把 ϕ 展开为如下形式:

$$\phi(\beta \pm \Delta\beta) = \phi(\beta) \pm \frac{d\phi}{d\beta} \Delta\beta \quad (1.34)$$

由此得到反射波包在 $x=0$ 处的复振幅为

$$B(z) = \{\exp[i(\Delta\beta z - 2\Delta\phi)] + \exp[-i(\Delta\beta z - 2\Delta\phi)]\} \exp[i(\beta z - 2\phi)] = 2\cos[\Delta\beta(z - 2z_s)] \exp[i(\beta z - 2\phi)] \quad (1.35)$$

式中,

$$z_s = \frac{d\phi}{d\beta} \quad (1.36)$$

上式就是波包即光线的纵向位移的简洁形式^[1.2]。利用式(1.3)和(1.4), 对于 TE 模有

$$k_0 z_s = \frac{\tan \theta}{\sqrt{N^2 - n_2^2}} \quad (1.37)$$

对于 TM 模,则有

$$k_0 z_s = \frac{\tan \theta}{\sqrt{N^2 - n_2^2}} \cdot \left(\frac{N^2}{n_2^2} + \frac{N^2}{n_1^2} - 1 \right)^{-1} \quad (1.38)$$

如图 1.11 所示,光线的纵向位移表示光线穿入衬底深度 x_s 后才被反射。其值为

$$x_s = \frac{z_s}{\tan \theta} \quad (1.39)$$

如果把这个结果与以后将给出的电磁场的解进行比较,可以发现,这些解预示着在衬底内存在着一个迅衰场,其衰减常数与光线的贯穿深度 x_s 密切相关。

为了得到波导中与能流概念相一致的 Z 字形传播的光线模型,必须在薄膜—覆盖层分界面引入古斯—汉欣位移。

图 1.12 表示平板波导的光线模型。其纵向位移分别为 $2x_s$ 和 $2x_c$, 光线贯穿深度分别为 x_s 和 x_c 。作为光线贯穿的结果,波导的有效厚度比 h 大,即

$$h_{\text{eff}} = h + x_s + x_c \quad (1.40)$$

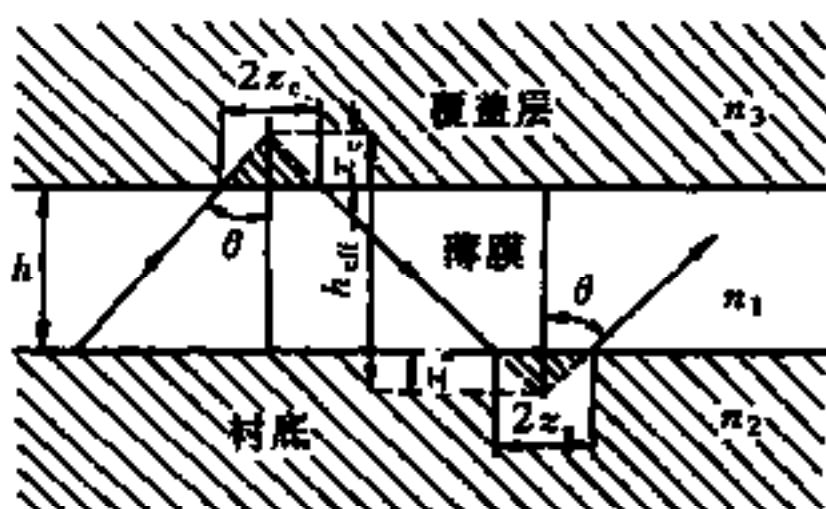


图 1.12 平板波导中 Z 字形传播的光线图像

图中标明了这一点。以后将会看到,只要提出能流或能量交换

的问题,波导有效厚度也就作为平板波导电磁理论的特征参量出现。导波光略微渗入衬底和覆盖层,但基本上限制在有效厚度 h_{eff} 的范围内。

1.3 平板波导的电磁理论

平板波导的理论处理可采用简单而直观的光线光学模型,但这种理论是不完善的。首先,它无法给出波导的模场分布、波导所携带的功率等概念;其次,为解释波导中光的传播特性,还必须引入位相和相干

等波动概念。而模场分布等知识对于光波导和光波导器件的大部分研究课题是必须具备的。本节将从麦克斯韦方程的边值问题出发,推导平板波导各类模式的场分布,携带功率以及模式本征方程等问题。

1.3.1 麦克斯韦方程和边界条件

随时间变化的无源电磁场的麦克斯韦方程为

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1.41)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1.42)$$

式中, t 为时间, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$, 为哈密顿算符; \mathbf{r} 为位置矢量; $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ 和 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, 分别为随时间和空间变化的电场、磁场、电位移和磁感应矢量。设场随时间作周期性变化, 则电场矢量和磁场矢量可分别写成

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \quad (1.43)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \quad (1.44)$$

式中, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 和 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ 分别为电场和磁场的复振幅矢量; i 为虚数单位, ω 为角频率。如果介质是无损耗和各向同性的, 则介电常数 $\epsilon(\omega)$ 和磁导率 μ 为实标量, 于是电磁场的物质方程为

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (1.45)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (1.46)$$

利用上述方程可以得到在无源、无损耗、各向同性和非磁性介质中的复振幅形式的麦克斯韦方程为

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (1.47)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -i\omega\epsilon_0 n^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (1.48)$$

式中, ϵ_0 和 μ_0 分别是真空介电常数和真空磁导率。对于非磁性介质, $\mu_0 = \mu$; n 是介质的折射率, 且有 $\epsilon = \epsilon_0 n^2$ 。在介电常数发生突变的分界面上, 上述麦克斯韦方程必须满足边界条件。

图 1.13 表示折射率分别为 n_1 和 n_2 的两种介质的分界面, 其中单位矢量 \mathbf{e}_n 垂直于分界面, 当界面上没有面电荷和面电流时, 其边界

条件为

$$\left. \begin{aligned} e_n \cdot (B_1 - B_2) &= 0 \\ e_n \cdot (D_1 - D_2) &= 0 \\ e_n \times (E_1 - E_2) &= 0 \\ e_n \times (H_1 - H_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.49)$$

由上式可得标量形式的边界条件为

$$n_1^2 E_{1n} = n_2^2 E_{2n} \quad (1.50)$$

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (1.51)$$

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \quad (1.52)$$

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (1.53)$$

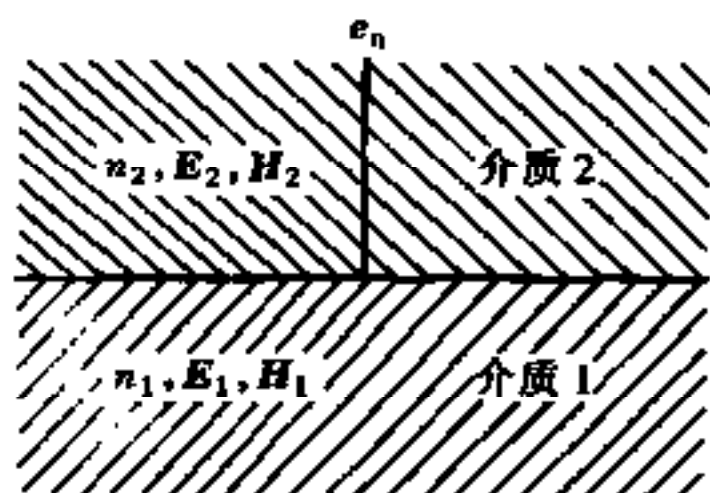


图 1.13 折射率分别为 n_1 和 n_2 的两种介质的分界面

式中,下标 n 和 t 分别表示该量是电磁场在分界面上的法向分量和切向分量。

对于非磁性介质,由于 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ 。故由式(1.52)和(1.53)可知,在分界面两边的磁场矢量相等,即 $H_1 = H_2$ 。

1.3.2 平板波导的波动方程

非对称平板波导的结构如图 1.14 所示,它由三层材料组成,中间一层是折射率为 n_1 的导波层,它淀积在折射率为 n_2 的衬底上,导波层上面是折射率为 n_3 的覆盖层(或称包层)。为了构成真正的光波

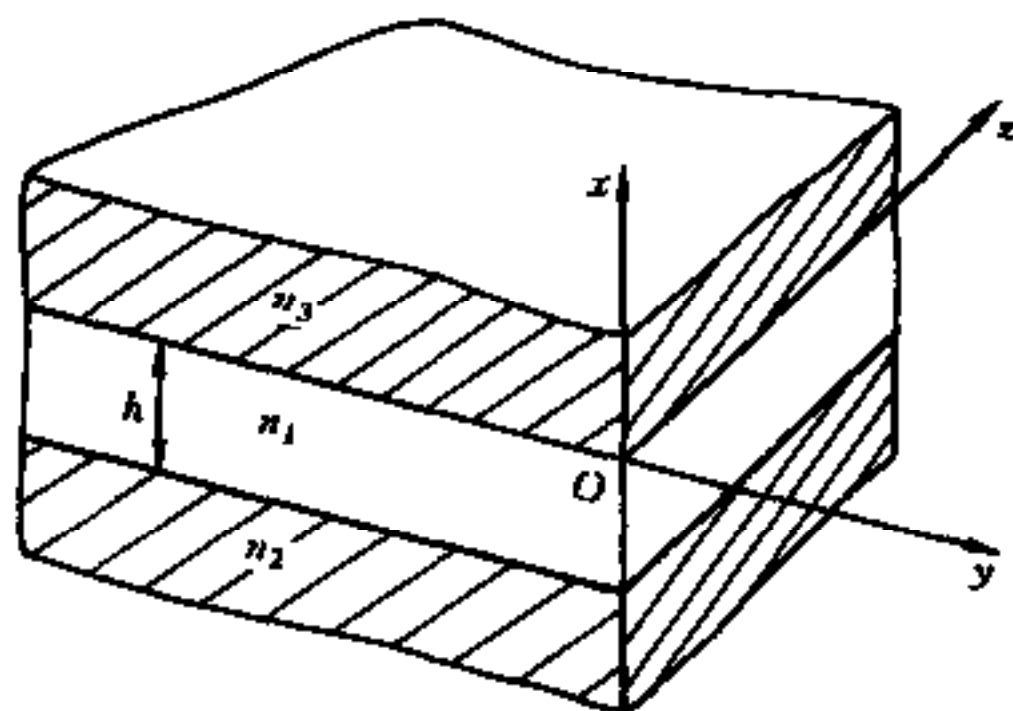


图 1.14 非对称平板波导和坐标系选择示意图

导, n_1 必须大于 n_2 和 n_3 , 不失一般性, 可假设: $n_1 > n_2 \geq n_3$ 。如果 $n_2 = n_3$, 则称波导是对称的; 当 $n_2 \neq n_3$ 时, 则波导是非对称的。由于对称波导是非对称波导的极限情况, 故本章仅叙述非对称波导的基本理论。

设衬底和覆盖层分别延伸到无穷远, 且导波层的宽度远大于它的厚度。在这种假设条件下, 可认为平板波导中的光场只在 x 方向上受到限制, 并设平板波导的几何结构和折射率分布沿 y 方向不变, 即折射率分布为 $n(x)$, 相应的模场也只是坐标 x 的函数, 于是可令

$$\partial/\partial y = 0 \quad (1.54)$$

设 h 为导波层的厚度, 则折射率分布

$$n(x) = \begin{cases} n_3 & 0 < x < +\infty \\ n_1 & -h < x < 0 \\ n_2 & -\infty < x < -h \end{cases} \quad (1.55)$$

在此条件下, 平板波导的麦克斯韦方程解与坐标 y 无关, 并可写成

$$\left. \begin{aligned} E(x, z, t) &= E(x) \exp[i(\beta z - \omega t)] \\ H(x, z, t) &= H(x) \exp[i(\beta z - \omega t)] \end{aligned} \right\} \quad (1.56)$$

式中, β 为电磁场沿 z 方向的传播常数。式(1.56)表明, 波导中的横向(x 向)电磁场以相速度 ω/β 沿波导的纵向(z 向)传播, 这个沿 z 向传播的行波, 就是通常所说的导波光。将式(1.56)代入式(1.47)和(1.48), 并利用式(1.54), 可得

$$\left. \begin{aligned} \beta E_y &= -\omega \mu H_x \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= i\omega \mu H_x \\ i\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -i\omega \epsilon E_y \end{aligned} \right\} \quad (1.57)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta H_y &= \omega \epsilon E_x \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} &= -i\omega \epsilon E_x \\ i\beta H_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -i\omega \mu H_y \end{aligned} \right\} \quad (1.58)$$

由上述六式,可以看出麦克斯韦方程分解为两组独立的方程,其中一组方程含有电磁场分量 E_y 、 H_x 和 H_z ;而另一组方程含有电磁场分量 H_y 、 E_x 和 E_z 。前者称为 TE 波,即电场垂直于波传播方向的模式;后者称为 TM 波,即磁场垂直于波传播方向的模式。

在式(1.57)中,把第一式和第二式代入第三式中,消去 H_x 和 H_z ,可得到 E_y 所遵从的方程为

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + (k_0^2 n_j^2 - \beta^2) E_y = 0 \quad (1.59)$$

对式(1.58)采取相同的步骤,可得到 H_y 所遵从的方程为

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + (k_0^2 n_j^2 - \beta^2) H_y = 0 \quad (1.60)$$

式中, $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 2\pi/\lambda$ 是光在真空中的传播常数(或称波数), λ 为真空光波长; $j=1,2,3$ 。

式(1.59)和(1.60)分别称为 TE 波和 TM 波的标量亥姆霍兹(Helmholtz)方程,或称为波动方程,它们适用于无源、无损耗、各向同性和非磁性的介质平板波导。

1.3.3 模式的定性分析

满足方程式(1.59)或(1.60)以及边界条件的线性独立解,称为平板波导的本征模,本征模对应的本征值是该模式沿 z 方向的传播常数 β 。在对式(1.59)和(1.60)求解之前,先对解的物理性质作以下说明。

以 TE 波为例讨论式(1.59)。由于在波导的不同区域有着不同的折射率 n_j ($j=1,2,3$),根据本征值 β 的不同取值范围,式(1.59)具有不同形式的解,下面分别加以讨论。

① $\beta > k_0 n_1$, 即在图 1.15 中的(a)范围,由式(1.59)可直接得到在各处都有 $(1/E_y)(\partial^2 E_y / \partial x^2) > 0$, 并且 E_y 在波导的三层介质中都是指数函数形式。由于 E_y 及其导数必须在两个界面连续,所以最后的场分布应该如图 1.15(a')所示。场随着离开波导两界面的距离而无限止增加,这个解在物理上是不能实现的,因此它并不对应于真实的波。

② $k_0 n_2 < \beta < k_0 n_1$, 对应于如图 1.15 中(b)和(c)两点的情况,因

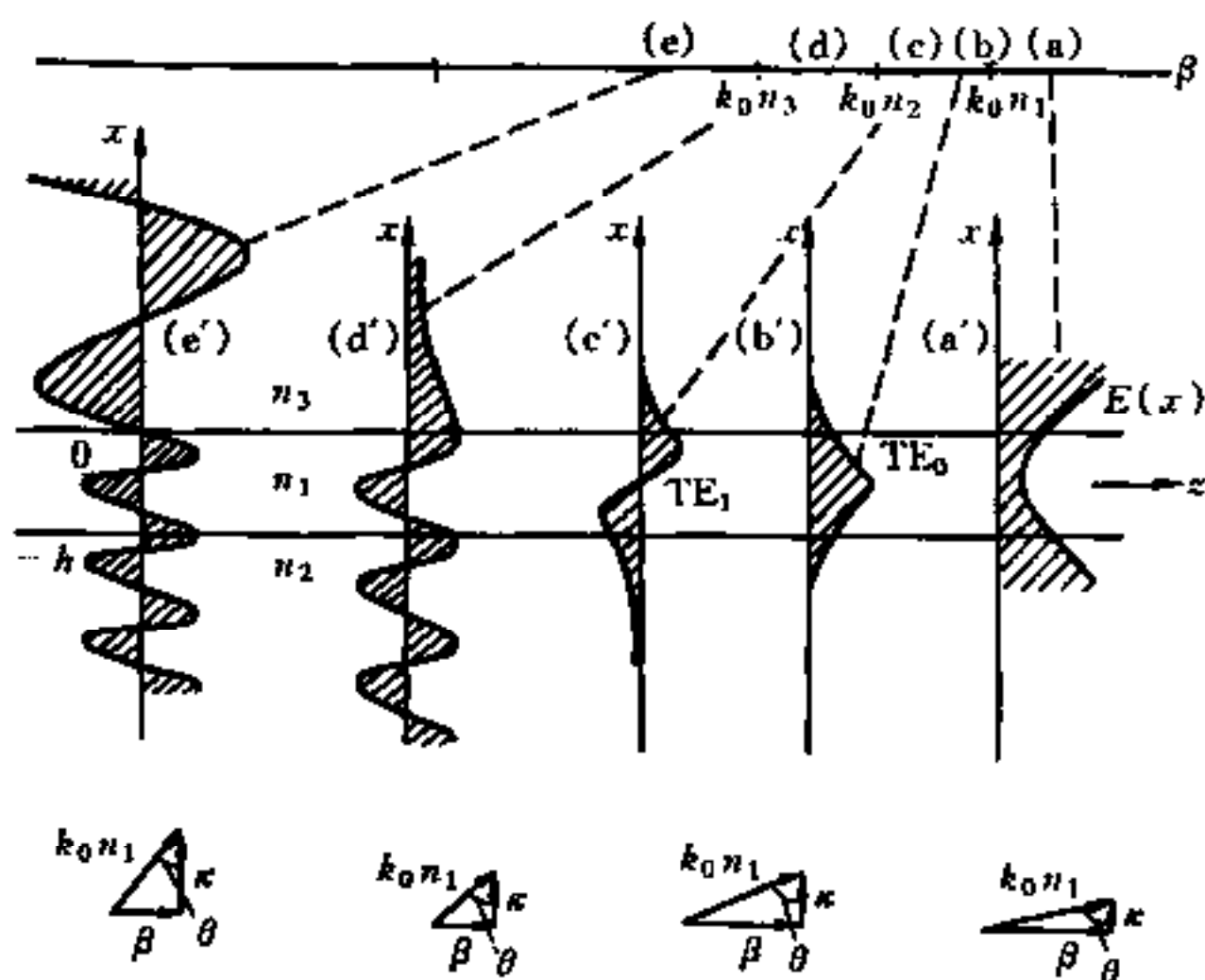


图 1.15 波动方程的解

上部:波导传播常数 β 不同的范围(a)~(e);

中部:对应于不同的 β 值的场分布;

下部:对应于不同传播范围的传播三角形

为 $(1/E_y)(\partial^2 E_y / \partial x^2) < 0$, 由式(1.59)可知, 在导波层中的解是正弦或余弦形式的, 但是在衬底和覆盖层中则是指数形式的。这样可以得到一个满足边界条件并在衬底和覆盖层中指数衰减的解。这些解如图 1.15(b')和(c')所示。由于这些模式所携带的能量基本上被限制在导波层内, 因此这些模式被称为束缚模或导模。

③ $k_0 n_3 < \beta < k_0 n_2$, 即在图 1.15 中的(d)范围, 式(1.59)的解对应于覆盖层中的指数函数, 导波层和衬底中的振荡函数, 如图 1.15(d')所示。这些模式称为衬底辐射模。

④ $0 < \beta < k_0 n_3$, 即范围(e), 式(1.59)的解在波导的三层介质中都是振荡函数, 这类模式称为辐射模或包层模。

众所周知, 光是一种横波, 即 TEM 波。电场和磁场均垂直于光的传播方向。可是光进入平板波导以后, 不再是 TEM 波, 而是 TE 波和 TM 波的叠加, 电磁场产生了纵向分量, 这当然是光在平板波导这种特

定结构中传播的结果。下面分析两类导模的性质。

1.3.4 TE 导模

(1) TE 导模的场分布和模式本征方程 考虑图 1.16 所示的介质平板波导以及选用的坐标系。由于分析的是导模,从而可知在导波层是振荡场,即是驻波。根据波动方程,导波层内场的形式是正弦函数和余弦函数的叠加;在覆盖层和衬底中,场是指数衰减的。因此平板波导三层介质中的电场分布

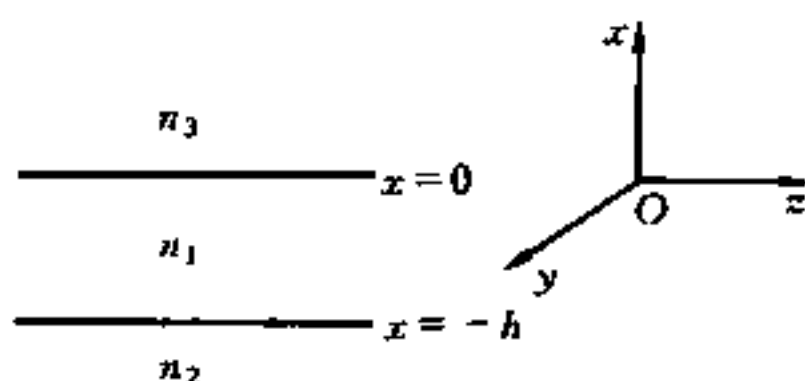


图 1.16 介质平板波导以及所选用的坐标系

$$E_y(x) = \begin{cases} A \exp(-qx) & 0 < x < +\infty \\ B \cos(\kappa x) + C \sin(\kappa x) & -h < x < 0 \\ D \exp[p(x+h)] & -\infty < x < -h \end{cases} \quad (1.61)$$

式中, A 、 B 、 C 和 D 是由边界条件所确定的常数。若把式(1.61)代入波动方程(1.59),则可得

$$\kappa = (k_0^2 n_1^2 - \beta^2)^{1/2} \quad (1.62)$$

$$q = (\beta^2 - k_0^2 n_3^2)^{1/2} \quad (1.63)$$

$$p = (\beta^2 - k_0^2 n_2^2)^{1/2} \quad (1.64)$$

利用 $E_y(x)$ 在导波层—衬底界面和导波层—覆盖层界面处连续以及 $\partial E_y / \partial x$ 在导波层—覆盖层界面连续的边界条件,可得

$$\left. \begin{aligned} A &= B \\ B \cos(\kappa h) - C \sin(\kappa h) &= D \\ -qA &= \kappa C \end{aligned} \right\} \quad (1.65)$$

可见, B 、 C 、 D 都可以用 A 表示,这样可将 $E_y(x)$ 写成

$$E_y(x) = \begin{cases} A \exp(-qx) & 0 < x < +\infty \\ A \left[\cos(\kappa x) - \left(\frac{q}{\kappa} \right) \sin(\kappa x) \right] & -h < x < 0 \\ A \left[\cos(\kappa h) + \left(\frac{q}{\kappa} \right) \sin(\kappa h) \right] \exp[p(x+h)] & -\infty < x < -h \end{cases} \quad (1.66)$$

已知 $E_y(x)$, 就可利用式(1.57)求出磁场分量 H_x 和 H_z 。式(1.66)中只有一个待定常数 A , 它可通过对场的功率归一化消去。

利用式(1.66), 再由 $\partial E_y / \partial x$ 在导波层—衬底界面上连续的条件, 可得

$$\kappa \sin(\kappa h) - q \cos(\kappa h) = p \left[\cos(\kappa h) + \frac{q}{\kappa} \sin(\kappa h) \right]$$

将上式两边除以 $\cos(\kappa h)$, 可化简为

$$\tan(\kappa h) = \frac{p + q}{\kappa(1 - pq/\kappa^2)} \quad (1.67)$$

上式即为 κ 、 p 、 q 之间的关系式, 也就是介质平板波导 TE 模的模式本征方程。由于 κ 、 p 、 q 都是 β 的函数, 因此通过求解方程(1.67)可以求出模式本征值 β 。

若设

$$\phi_{12} = \arctan\left(\frac{p}{\kappa}\right) \quad (1.68)$$

$$\phi_{13} = \arctan\left(\frac{q}{\kappa}\right) \quad (1.69)$$

则利用三角函数恒等式, 可将式(1.67)改写成如下位相方程:

$$\kappa h = m\pi + \phi_{12} + \phi_{13} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.70)$$

根据菲涅耳公式, $-2\phi_{12}$ 是光在导波层—衬底界面上的全反射相移, 而 $-2\phi_{13}$ 是光在导波层—覆盖层界面上的全反射相移。此外, 由图 1.15 的波矢量图可知, κ 是波矢量的横向分量, 因此 $2\kappa h$ 是光从导波层—衬底界面传播到导波层—覆盖层界面再返回所历经的位相变化, 再使 $2\kappa h$ 与两界面上的全反射相变累加起来。可以看到, 为了达到相干加强(谐振)的结果, 这个相移的累加总和必须是 2π 的整数倍。由于 m 是整数, 根据方程(1.70)可知, 模式本征值是分立的, 即波导结构确定以后, 相应于某一光波长的导模数也是确定的。图(1.17)表示 TE_0 、 TE_1 和 TE_2 三种导模的电场分布, 下标表示模序数 m 。由模场分布可见, 模序数 m 的物理含义是指导波层中模场的节点数。

由式(1.66)可知, 场在覆盖层和衬底中是按指数函数衰减的, 衰减的快慢分别由衰减系数 p 和 q 确定。 p 、 q 的值大, 则场衰减快, 穿透

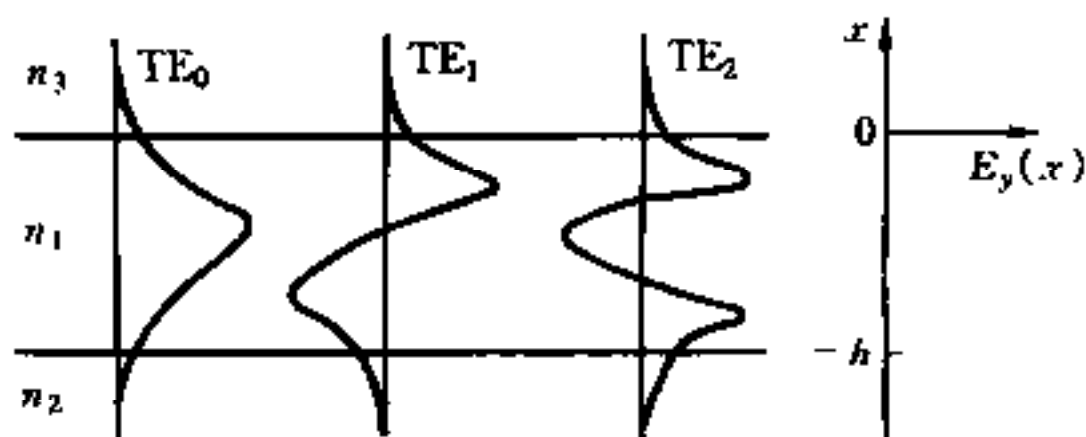


图 1.17 TE_0 、 TE_1 和 TE_2 导模的电场分布

深度 $1/p$ 和 $1/q$ 就浅,说明场主要束缚在导波层中。反之, p 、 q 的值小,则场衰减慢,穿透深度就深,说明波导束缚场的能力差。 p 、 q 的大小显然与覆盖层、衬底的折射率有关,同时还与模序数 m 密切相关。由模式本征方程(1.70)可以导出, m 越大,则 β 越小,再由(1.63)和(1.64)两式可知, p 和 q 也越小。这表明高阶模的电磁场可延伸到导波层外的距离较远。为表明波导束缚电磁场的能力的大小,通常用波导的有效厚度这一参量来量度,波导的有效厚度

$$h_{\text{eff}} = h + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad (1.71)$$

(2) TE 导模携带的功率 本征模式携带的能量与坡印廷(Poynting)矢量有关,电磁场对时间平均的坡印廷矢量为

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \quad (1.72)$$

式中,Re 表示取实数;* 表示复共轭。显然, \mathbf{S} 也是电磁场的功率流密度矢量,这样可得到电磁场沿 z 方向的功率为

$$P = \frac{1}{2} \text{Re} \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{e}_z dS \quad (1.73)$$

式中, \mathbf{e}_z 为沿 z 方向的单位矢量,积分域 S 为遍及波导的无穷大横截面。

由式(1.57)可得

$$H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu} E_y$$

因此,介质平板波导 TE 导模在 y 方向单位间隔内沿 z 方向携带的功率为

$$P = \frac{\beta}{2\omega\mu} \int_{-\infty}^{\infty} [E_y(x)]^2 dx \quad (1.74)$$

针对某一确定的模式 m , 功率归一化的条件可写为

$$\frac{\beta_m}{2\omega\mu} \int_{-\infty}^{\infty} [E_y^{(m)}(x)]^2 dx = 1 \quad (1.75)$$

利用式(1.66)和(1.67), 直接计算式(1.75), 可得到电磁场的归一化系数为

$$A_m = 2\kappa_m \left[\frac{\omega\mu}{\beta_m \left(h + \frac{1}{p_m} + \frac{1}{q_m} \right) (\kappa_m^2 + q_m^2)} \right]^{1/2} \quad (1.76)$$

1.3.5 TM 导模

介质平板波导中的 TM 导模, 具有 H_y 、 E_x 和 E_z 三个电磁场分量, 类似于上节求 TE 导模的方法, 可以利用 TM 模的波动方程(1.60), 列出介质平板波导三个区域中 H_y 的表达式, 即

$$H_y(x) = \begin{cases} C \exp(-qx) & 0 < x < +\infty \\ C \left[\cos(\kappa x) - \left(\frac{n_1}{n_3} \right)^2 \left(\frac{q}{\kappa} \right) \sin(\kappa x) \right] & -h < x < 0 \\ C \left[\cos(\kappa h) + \left(\frac{n_1}{n_3} \right)^2 \left(\frac{q}{\kappa} \right) \sin(\kappa h) \right] \exp[p(x+h)] & -\infty < x < -h \end{cases} \quad (1.77)$$

再利用 $(1/n_j^2)(\partial H_y/\partial x)$ 在导波层—衬底界面上连续的条件, 可得介质平板波导 TM 导模的模式本征方程:

$$\tan(\kappa h) = \frac{n_1^2 \kappa (n_3^2 p + n_2^2 q)}{n_2^2 n_3^2 \kappa^2 - n_1^4 p q} \quad (1.78)$$

上式也可以改写成

$$\kappa h = m\pi + \phi_{12} + \phi_{13} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.79)$$

式中

$$\phi_{12} = \arctan \left[\left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \frac{p}{\kappa} \right] \quad (1.80)$$

$$\phi_{13} = \arctan \left[\left(\frac{n_1}{n_3} \right)^2 \frac{q}{\kappa} \right] \quad (1.81)$$

同样,由式(1.73)可得 TM 导模在 y 方向单位间隔内沿 z 方向携带的功率

$$P = \frac{\beta}{2\omega\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n_j^2} [H_y(x)]^2 dx \quad (1.82)$$

针对某一确定的模式 m , 功率归一化的条件可写为

$$\frac{\beta_m}{2\omega\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n_j^2} [H_y^{(m)}(x)]^2 dx = 1 \quad (1.83)$$

利用式(1.77)和(1.78), 直接计算式(1.83), 可得到电磁场的归一化系数为

$$C_m = 2\kappa_m \left[\frac{n_1^2 n_3^2 \omega \epsilon_0}{\beta_m (n_3^4 \kappa_m^2 + n_1^4 q_m^2) h_{\text{eff}}} \right]^{1/2} \quad (1.84)$$

式中, TM 导模的波导有效厚度定义为

$$h_{\text{eff}} = h + \frac{n_1^2 n_2^2}{p_m} \cdot \frac{\kappa_m^2 + p_m^2}{n_2^4 \kappa_m^2 + n_1^4 p_m^2} + \frac{n_1^2 n_3^2}{q_m} \cdot \frac{\kappa_m^2 + q_m^2}{n_3^4 \kappa_m^2 + n_1^4 q_m^2} \quad (1.85)$$

比较 TE 导模与 TM 导模的表达式, 不难看出, 描述 TM 导模的方程比相应的 TE 导模的方程要复杂得多。产生这种复杂性的原因完全是由边界条件所引起的。前面已经提到, 对 TE 导模, 只要求 E_y 和 $\partial E_y / \partial x$ 在界面上连续即可, 而 $\partial E_y / \partial x$ 连续的条件是由 H_z 在界面上连续而导出的。因为

$$H_z = \frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (1.86)$$

而三种介质中的 μ 都相同, 故可用 $\partial E_y / \partial x$ 在界面上连续的条件。而对 TM 导模, 相应于式(1.86)的公式为

$$E_z = -\frac{1}{i\omega\epsilon} \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

由于三种介质中的 ϵ 都不相同, 因此不能简单地用 $\partial H_y / \partial x$, 而必须用 $(1/n_j^2)(\partial H_y / \partial x)$ 在界面上连续的条件, 对此读者必须予以注意。

1.3.6 波导的归一化参量^[1.3]

本小节引入几个常用的归一化参数,这些无量纲参数的引入,不仅有利于对波导特性的理解,而且把波导参数减少到有限的几个,这对波导的设计是非常有利的。

(1) 波导的有效折射率

$$N = \beta/k_0 \quad (1.87)$$

由于 β 的取值范围为

$$k_0 n_2 < \beta < k_0 n_1 \quad (1.88)$$

因而有效折射率的取值范围应为

$$n_2 < N < n_1 \quad (1.89)$$

(2) 波导的归一化频率或归一化厚度

$$V = k_0 h (n_1^2 - n_2^2)^{1/2} \quad (1.90)$$

另外两个参数的定义与模式类型有关,即对 TE 模和 TM 模,这些参数稍有区别,因此必须对 TE 模和 TM 模分别进行研究。

(3) TE 模的归一化波导折射率

$$b_{\text{TE}} = \frac{N^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \quad (1.91)$$

由式(1.89)可知, $0 < b_{\text{TE}} < 1$ 。

(4) TE 模的非对称参量

$$a_{\text{TE}} = \frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2} \quad (1.92)$$

a_{TE} 描述波导结构的非对称性,它的取值范围从完全对称($n_2 = n_3$)时的零到极度不对称($n_2 \neq n_3, n_1 \approx n_2$)时的无穷大,即 $0 < a_{\text{TE}} < \infty$ 。

通过定义以上归一化参量,平板波导 TE 模的模式本征方程(1.70)可改写成如下形式:

$$V \sqrt{1 - b_{\text{TE}}} = m\pi + \arctan \sqrt{\frac{b_{\text{TE}}}{1 - b_{\text{TE}}}} + \arctan \sqrt{\frac{b_{\text{TE}} + a_{\text{TE}}}{1 - b_{\text{TE}}}} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.93)$$

这种形式的色散方程仅出现三个参数,它表明归一化的波导折射率 b_{TE} 只依赖于两个独立的参数:归一化频率 V 和波导非对称参量 α_{TE} 。由式(1.93)的数值计算结果得到如图 1.18 所示的归一化曲线图,这里按照四个不同的非对称参量的值以及模序数 $m=0,1,2$,画出了前三

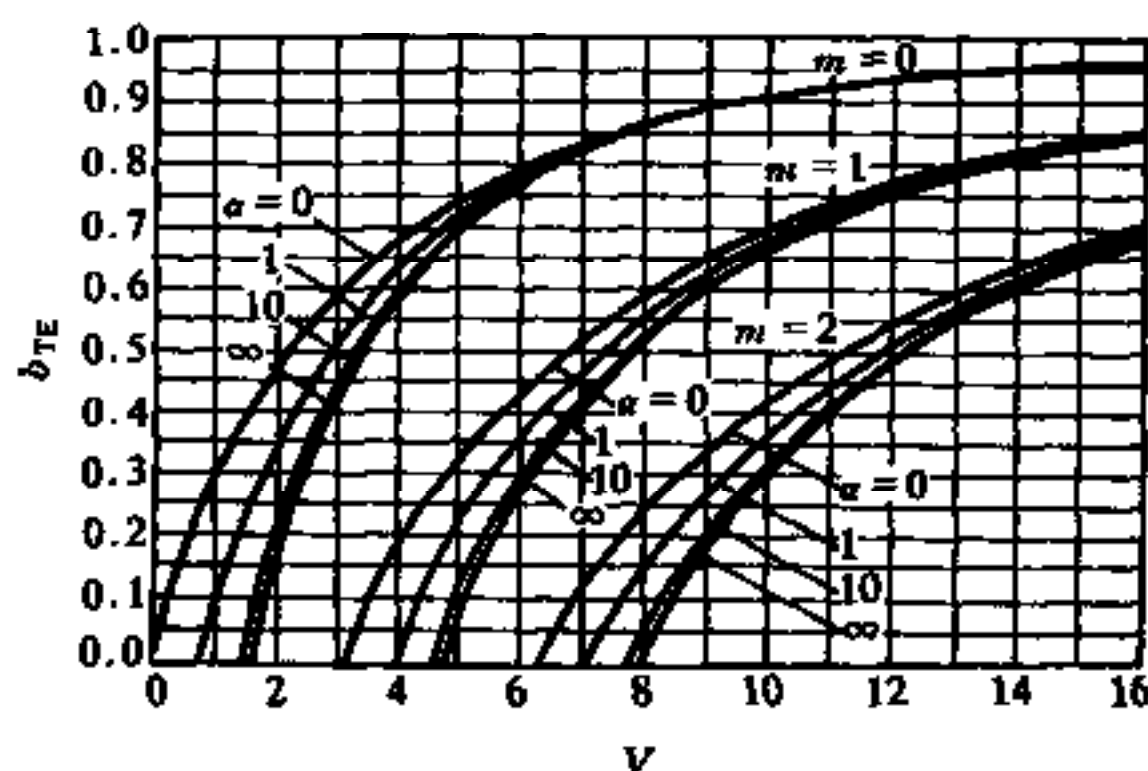


图 1.18 各种不同对称度的波导 b_{TE} 与归一化频率 V 的函数关系

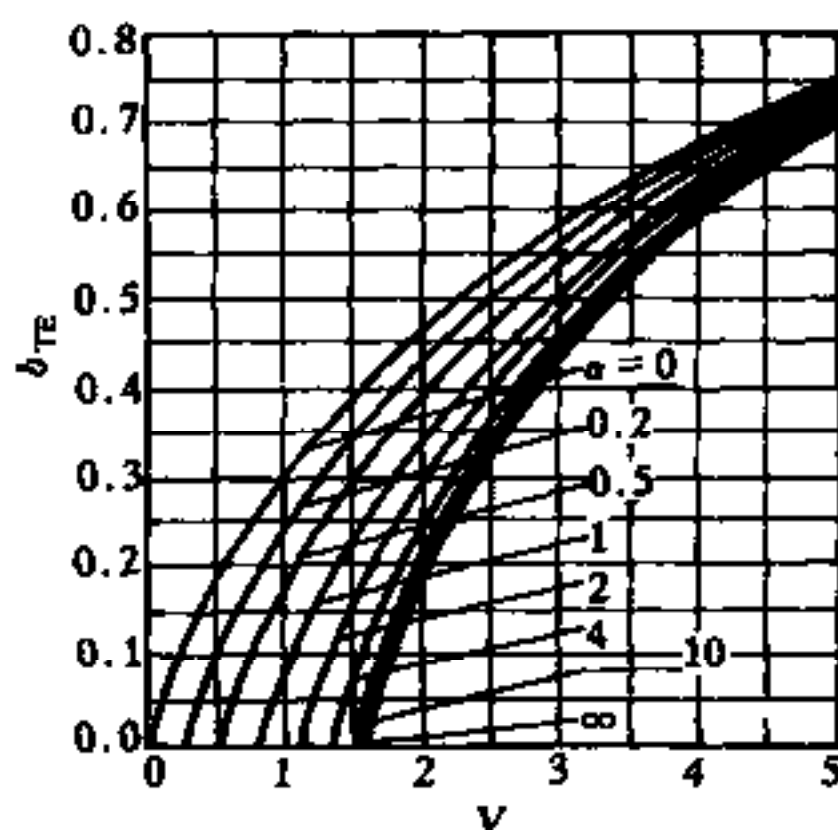


图 1.19 TE_0 模的波导折射率 b_{TE} 与归一化频率 V 的函数关系

个 TE 模的波导折射率 b_{TE} 与归一化频率 V 的函数关系。图 1.19 是 TE_0 模在 8 个不同的非对称参量值下的色散关系图。图中的横坐标已被扩大。

波导中导模的截止是一个重要的概念。从线光学角度看,导模截止时光线的人射角正好等于导波层—衬底界面上的全反射临界角;而从电磁场理论分析,这时衬底中的指数衰减场正好处于向振荡场过渡的临界点。导模截止时,有

$$\beta = k_0 n_2 \quad (1.94)$$

并有

$$N = n_2 \quad (1.95)$$

或

$$b_{TE} = 0 \quad (1.96)$$

平板波导 TM 模的归一化参数类似于 TE 模,它比 TE 模的情况稍微复杂一点。

(5) TM 模的归一化波导折射率

$$b_{TM} = \left(\frac{N^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \right) \left(\frac{n_1}{n_2 \xi_2} \right)^2 \quad (1.97)$$

式中, ξ_2 称为约化因子,它由下式定义

$$\xi_2 = \frac{N^2}{n_1^2} + \frac{N^2}{n_2^2} - 1 = \frac{\left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2}{(1 - b_{TM}) + b_{TM} \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^4} \quad (1.98)$$

b_{TM} 的取值范围仍维持在截止时的 0 与远离截止时的 1 之间。

(6) TM 模的非对称参量定义为

$$a_{TM} = \left(\frac{n_1}{n_3} \right)^4 \left(\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2} \right) \quad (1.99)$$

TM 模的归一化色散方程为

$$V \left[\sqrt{\xi_2} \left(\frac{n_1}{n_2} \right) \right] \sqrt{1 - b_{TM}} = m\pi + \arctan \sqrt{\frac{b_{TM}}{1 - b_{TM}}} + \arctan \sqrt{\frac{b_{TM} + a_{TM}(1 - b_{TM}d)}{1 - b_{TM}}}$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.100)$$

式中

$$d = \left[1 - \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{n_3}{n_1} \right)^2 \right] \quad (1.101)$$

显然,式(1.100)比式(1.93)要复杂得多,除了 V 之外, b_{TM} 还与 ξ_2 、 a_{TM} 、 d 和 n_1/n_2 和 n_3/n_1 有关。但由于 ξ_2 、 a_{TM} 和 d 仅与折射率比 n_2/n_1 和 n_3/n_1 有关,因此,这两个折射率比可作为独立的参数。文献[1.3]指出,以 n_2/n_1 和 a_{TM} 作为独立的参数来解色散方程是比较方便的。

参考文献

- [1.1] M. 玻恩, E. 沃耳夫. 光学原理, 北京: 科学出版社, 1978.
- [1.2] H. Kogelnik, T. P. Sosnowski, H. P. Weber. IEEE. Quant. Electron., 1973, QE-9(8): 795~800.
- [1.3] H. Kogelnik, V. Ramaswamy. Appl. Opt., 1974, 13(8): 1857~1862.

第 2 章 转移矩阵理论

2.1 引言

利用矩阵技术描述光在多层薄膜中的传播是一种简单易行的方法。这种方法不仅物理意义清晰、计算方便,而且具有给出解析公式的潜力。例如,M. 玻恩和 E. 沃耳夫利用特性矩阵求解光通过多层介质膜时的透射率和反射率问题^[2.1];A. Yariv 等利用光线矩阵处理光线通过透镜或似透镜介质的传输问题^[2.2],都得到了很好的结果。本章利用文献[2.1]中的理论,并根据介质光波导的特点,选取了合适的波动方程的特解,构造出一种与特性矩阵不同的转移矩阵。这种转移矩阵是一个实矩阵,它具有物理意义更加明确、计算更为方便的特点。在以后几章中,我们将会看到转移矩阵处理问题的重要作用。本章首先通过简单的三层平板波导来建立基本的转移矩阵,并给出转移矩阵的一些基本性质。

2.2 转移矩阵及其基本性质

2.2.1 转移矩阵的建立

本节用薄膜光学类似理论,引入介质平板波导转移矩阵概念,详细的推导可参阅薄膜光学的有关文献[2.1]和[2.3]。

厚度为 h 的三层介质平板波导的折射率分布如图 2.1 所示。

以 TE 波为例,光导波满足的标量波动方程为

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + (k_0^2 n_j^2 - \beta^2) \Psi = 0, \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

式中, $\Psi(x)$ 为 TE 波任一电磁场分量的场分布。选取方程(2.1)的两个特解 $\Psi_1(x)$ 和 $\Psi_2(x)$, 使之满足边界条件

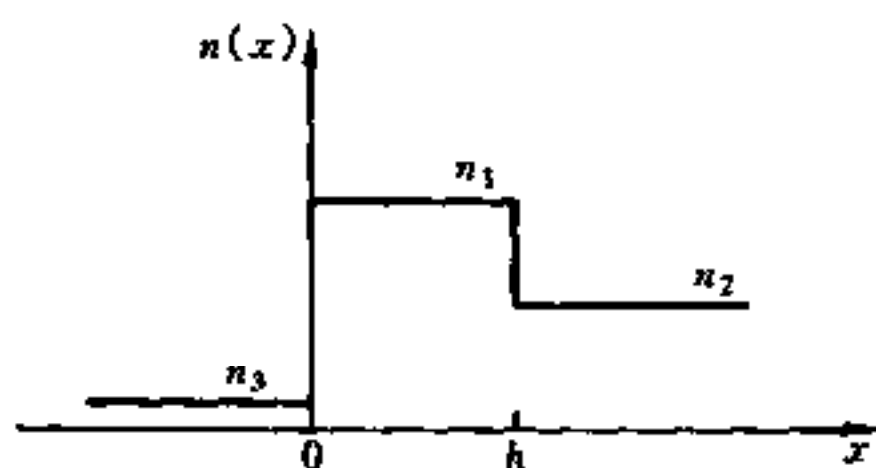


图 2.1 三层平板波导的折射率分布

$$\Psi_1(0) = \Psi'_2(0) = 1 \quad \text{和} \quad \Psi'_1(0) = \Psi_2(0) = 0$$

波动方程(2.1)的一般解应是 $\Psi_1(x)$ 和 $\Psi_2(x)$ 两特解的线性叠加, 即

$$\Psi(x) = C_1 \Psi_1(x) + C_2 \Psi_2(x) \quad (2.2)$$

在区间 $(0, h)$ 界面上, 场分布及其导数为

$$\left. \begin{aligned} \Psi(0) &= C_1 \\ \Psi'(0) &= C_2 \\ \Psi(h) &= C_1 \Psi_1(h) + C_2 \Psi_2(h) \\ \Psi'(h) &= C_1 \Psi'_1(h) + C_2 \Psi'_2(h) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

上式消去 C_1 和 C_2 后, 可得场分布及其导数的转移关系

$$\begin{bmatrix} \Psi(h) \\ \Psi'(h) \end{bmatrix} = M(h) \begin{bmatrix} \Psi(0) \\ \Psi'(0) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

式中

$$M(h) = \begin{bmatrix} \Psi_1(h) & \Psi_2(h) \\ \Psi'_1(h) & \Psi'_2(h) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

称为区间 $(0, h)$ 的转移矩阵, 它仅与区间内的折射率分布以及模式本征值有关, 而与区间外的折射率分布无关。

根据上述概念, 若设 $\Psi(x)$ 为 $E_y(x)$, 而选取两个特解分别为 $\cos(\kappa x)$ 和 $\frac{1}{\kappa} \sin(\kappa x)$, 则可得矩阵方程

$$\begin{bmatrix} E_y(h) \\ E'_y(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\kappa h) & \frac{1}{\kappa} \sin(\kappa h) \\ -\kappa \sin(\kappa h) & \cos(\kappa h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y(0) \\ E'_y(0) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

式中 2×2 矩阵

$$M^{\text{TE}}(h) = \begin{bmatrix} \cos(\kappa h) & \frac{1}{\kappa} \sin(\kappa h) \\ -\kappa \sin(\kappa h) & \cos(\kappa h) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

是对应于平板波导导波层的转移矩阵,它使导波层两端 $x=0$ 和 $x=h$ 界面上的电磁场矢量建立起关系。下面将看到,利用这种传递关系——方程(2.6),可完全确定光导波的传播特性。

利用类似的步骤,可得 TM 波满足的矩阵方程

$$\begin{bmatrix} H_y(h) \\ \frac{1}{n_2^2} H'_y(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\kappa h) & \frac{n_1^2}{\kappa} \sin(\kappa h) \\ -\frac{\kappa}{n_1^2} \sin(\kappa h) & \cos(\kappa h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_y(0) \\ \frac{1}{n_3^2} H'_y(0) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

对应的 TM 波的转移矩阵为

$$M^{\text{TM}}(h) = \begin{bmatrix} \cos(\kappa h) & \frac{n_1^2}{\kappa} \sin(\kappa h) \\ -\frac{\kappa}{n_1^2} \sin(\kappa h) & \cos(\kappa h) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

若把 TE 波和 TM 波对应于导波层的转移矩阵写成统一的形式,则有

$$M(h) = \begin{bmatrix} \cos(\kappa h) & \frac{f}{\kappa} \sin(\kappa h) \\ -\frac{\kappa}{f} \sin(\kappa h) & \cos(\kappa h) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

式中,

$$f = \begin{cases} 1 & \text{TE 波} \\ n_1^2 & \text{TM 波} \end{cases} \quad (2.11)$$

2.2.2 转移矩阵的基本性质

在利用转移矩阵分析较为复杂的光波导之前,有必要讨论一下转移矩阵的一些基本性质。为方便起见, 2×2 转移矩阵可记为

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

① 由式(2.7)和(2.9)可见,在无吸收介质中,转移矩阵是一个实系数的单位模矩阵,即有

$$\det(M) = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = 1 \quad (2.12)$$

式中, \det 表示行列式。可以证明,单位模的物理意义是能量守恒。本书第5章将通过一个具体例子给出详细的说明,与薄膜光学中的特性矩阵不同,转移矩阵的矩阵元都是实的。这样,更有利于对物理意义的理解和数值计算。

② 转移矩阵的本征值 λ 由久期方程

$$|M - \lambda E| = 0 \quad (2.13)$$

决定,式中 E 为单位矩阵,即

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

把式(2.14)代入式(2.13),并利用转移矩阵的单位模性质,可得

$$\lambda^2 - (m_{11} + m_{22})\lambda + 1 = 0 \quad (2.15)$$

由式(2.15)可以看出,转移矩阵的两个本征值 λ_1 和 λ_2 互为倒数,即有

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$$

一般情况下,两本征值可分别写成

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= e^{i\kappa h} \\ \lambda_2 &= e^{-i\kappa h} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

式中 κ 和 h 的物理意义由具体的结构确定。再根据式(2.15)显然有

$$\begin{aligned} \cos(\kappa h) &= \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22}) = \\ &= \frac{1}{2}\text{tr}M(h) \end{aligned} \quad (2.17)$$

式中 tr 表示矩阵的迹。式(2.17)是个重要的公式,将在周期性波导和多量子阱波导中获得广泛的应用。

③ 考虑图 2.2 所示的四层平板波导的折射率分布,其中,折射率为 n_1 的薄膜厚度为 h_1 ,而折射率为 n_2 的薄膜厚度为 h_2 , n_0 和 n_3 分

别为覆盖层和衬底的折射率。

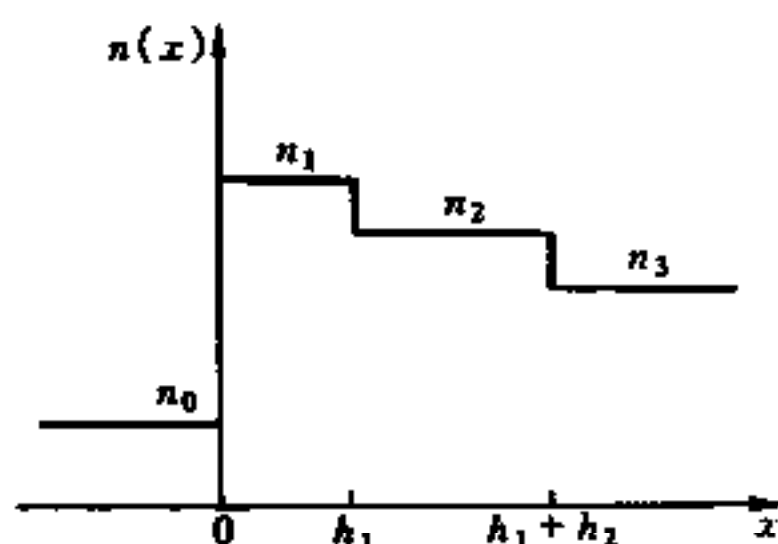


图 2.2 四层平板波导的折射率分布

如果 $M(h_1)$ 和 $M(h_2)$ 分别是这两层薄膜对应的转移矩阵, 则由式(2.4)可得

$$\begin{bmatrix} \Psi(h_1) \\ \Psi'(h_1) \end{bmatrix} = M(h_1) \begin{bmatrix} \Psi(0) \\ \Psi'(0) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi(h_1 + h_2) \\ \Psi'(h_1 + h_2) \end{bmatrix} = M(h_2) \begin{bmatrix} \Psi(h_1) \\ \Psi'(h_1) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

所以

$$\begin{bmatrix} \Psi(h_1 + h_2) \\ \Psi'(h_1 + h_2) \end{bmatrix} = M(h_1 + h_2) \begin{bmatrix} \Psi(0) \\ \Psi'(0) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

式中

$$M(h_1 + h_2) = M(h_2)M(h_1) \quad (2.21)$$

注意, $M(h_2)$ 和 $M(h_1)$ 的位置不可互换。

以上结果立即可推广到厚度分别为 h_1, h_2, \dots, h_N 的 $N+2$ 层平板波导的情况, 设这些薄膜对应的转移矩阵分别是 $M(h_1), M(h_2), \dots, M(h_N)$, 则

$$M(h_1 + h_2 + \dots + h_N) = M(h_N)M(h_{N-1}) \cdots M(h_2)M(h_1) \quad (2.22)$$

④ 一个任意的多层膜等效于一个双层膜, 但一般说来, 不能等效于一个单层膜。此等效定理可用薄膜理论中的泡利(Pauli)矩阵加以

证明。以 TE 波为例,考察单层膜对应的转移矩阵式(2.7),该矩阵可表示为

$$M = \cos \kappa h \cdot \sigma_0 + \frac{1 - \kappa^2}{2\kappa} \sin \kappa h \cdot \sigma_1 - \frac{1 + \kappa^2}{2\kappa} \sin \kappa h \cdot \sigma_2 \quad (2.23)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \sigma_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \sigma_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

可见

$$\sigma_0^2 = \sigma_1^2 = -\sigma_2^2 = -\sigma_0 \quad (2.25)$$

引入新的矩阵

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

显然有

$$\sigma_3^2 = \sigma_0 \quad (2.27)$$

并满足关系

$$\sigma_1 \sigma_2 = -\sigma_2 \sigma_1 = \sigma_3 \quad (2.28)$$

这里把 σ_0 、 σ_1 、 σ_2 和 σ_3 四个基本矩阵称为泡利矩阵。

一个双层膜对应的转移矩阵应是两个式(2.23)表示的矩阵的乘积,由式(2.25)和(2.28),可把这个乘积写成

$$M_2 \cdot M_1 = a_0 \sigma_0 + a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3 \quad (2.29)$$

式中, a_0 、 a_1 、 a_2 和 a_3 是泡利矩阵的系数。

由于存在关系式(2.27)以及

$$\sigma_1 \sigma_3 = -\sigma_3 \sigma_1 = \sigma_2$$

$$\sigma_2 \sigma_3 = -\sigma_3 \sigma_2 = \sigma_1$$

所以对于任意数目的转移矩阵的乘积,都可以写成如式(2.29)的四个泡利矩阵的线性组合。这样,我们就证明了上述的等效定理。另外,由

于 σ_3 的存在, 多层膜一般不能等效于单层膜。但在特殊情况下, 多层膜可以等效于单层膜。性质⑤将阐明这个问题。

上述定理的证明表明: 一个任意多层膜波导可等效于一个双层膜波导(即四层平板波导)。这个定理为分析多层平板波导和渐变折射率波导提供了一条新的路径。

⑤ 考察单层薄膜对应的转移矩阵式(2.10), 发现该矩阵主对角元上的元素相等, 即 $m_{11} = m_{22}$ 。由性质③可知, 一个多层膜对应的转移矩阵是各个单层膜对应的转移矩阵的连乘积。若薄膜层数为 l , 则设

$$M = M_1 M_{l-1} \cdots M_2 M_1 = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

这个多层膜的转移矩阵的四个元素显然仍是实的, 而且仍然满足 $M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = 1$ 的单位模条件。但一般情况下, $M_{11} \neq M_{22}$ 。因此, 一个多层膜不能与一个单层膜等效, 它只能等效于一个双层膜。但是, 对于对称的多层膜, 这时有 $M_{11} = M_{22}$ 。这说明在数学上, 对于一个对称的多层平板波导, 存在一个等效的三层平板波导及对应的等效折射率。

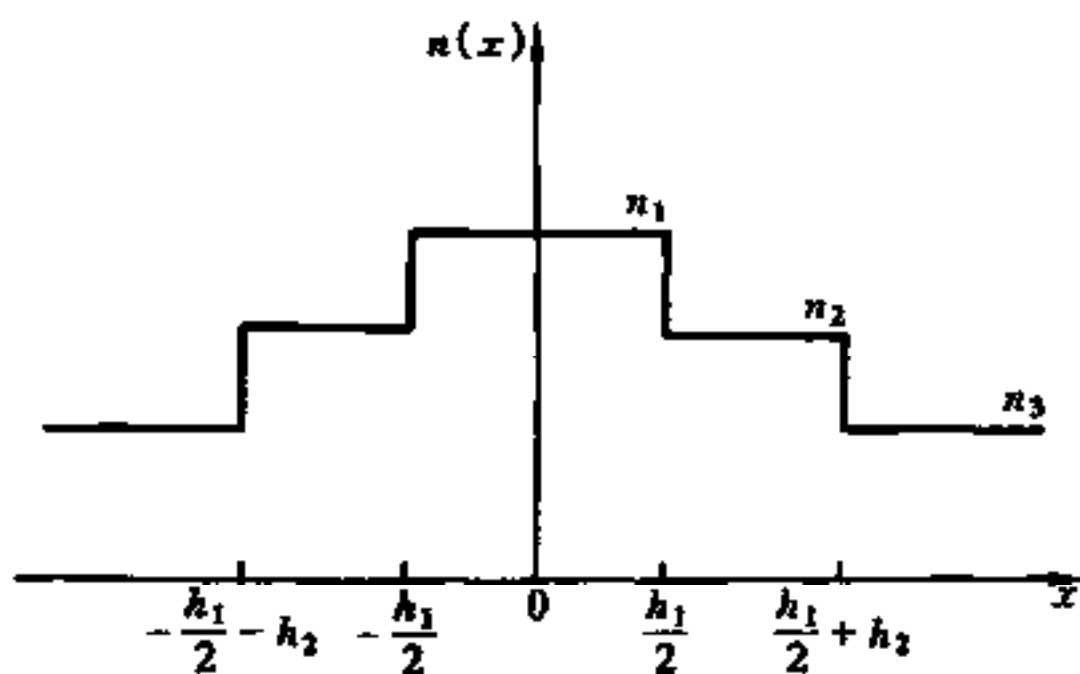


图 2.3 对称五层平板波导的折射率分布

现以简单的对称五层平板波导为例。根据图 2.3 所示的各层薄膜厚度与折射率分布, 立刻可得对称三层膜对应的转移矩阵为(以 TE 波为例)

$$\begin{aligned}
 M &= \begin{bmatrix} \cos(\kappa_2 h_2) & \frac{1}{\kappa_2} \sin(\kappa_2 h_2) \\ -\kappa_2 \sin(\kappa_2 h_2) & \cos(\kappa_2 h_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\kappa_1 h_1) & \frac{1}{\kappa_1} \sin(\kappa_1 h_1) \\ -\kappa_1 \sin(\kappa_1 h_1) & \cos(\kappa_1 h_1) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\kappa_2 h_2) & \frac{1}{\kappa_2} \sin(\kappa_2 h_2) \\ -\kappa_2 \sin(\kappa_2 h_2) & \cos(\kappa_2 h_2) \end{bmatrix} = \\
 &\quad \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{2.31}$$

式中,

$$M_{11} = M_{22} = \cos(\kappa_1 h_1) \cos(2\kappa_2 h_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) \sin(\kappa_1 h_1) \sin(2\kappa_2 h_2)
 \tag{2.32}$$

$$M_{12} = \frac{1}{\kappa_2} \cos(\kappa_1 h_1) \sin(2\kappa_2 h_2) + \frac{1}{\kappa_2} \sin(\kappa_1 h_1) \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} \cos^2(\kappa_2 h_2) - \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \sin^2(\kappa_2 h_2) \right)
 \tag{2.33}$$

$$M_{21} = -\kappa_2 \cos(\kappa_1 h_1) \sin(2\kappa_2 h_2) - \kappa_2 \sin(\kappa_1 h_1) \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \cos^2(\kappa_2 h_2) - \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \sin^2(\kappa_2 h_2) \right)
 \tag{2.34}$$

由于 $M_{11} = M_{22}$, 上述对称三层膜与一单层膜等效, 这个单层膜对应的转移矩阵为

$$M = \begin{bmatrix} \cos \kappa(h_1 + 2h_2) & \frac{1}{\kappa} \sin \kappa(h_1 + 2h_2) \\ -\kappa \sin \kappa(h_1 + 2h_2) & \cos \kappa(h_1 + 2h_2) \end{bmatrix}
 \tag{2.35}$$

于是,

$$M_{11} = M_{22} = \cos \kappa(h_1 + 2h_2)
 \tag{2.36}$$

$$M_{12} = \frac{1}{\kappa} \sin \kappa(h_1 + 2h_2)
 \tag{2.37}$$

$$M_{21} = -\kappa \sin \kappa(h_1 + 2h_2)
 \tag{2.38}$$

将式(2.38)除以式(2.37), 并利用式(2.33)和(2.34), 可得

$$\kappa = \sqrt{-\frac{M_{21}}{M_{12}}} = \left\{ \frac{\kappa_2 \cos(\kappa_1 h_1) \sin(2\kappa_2 h_2) + \kappa_2 \sin(\kappa_1 h_1) \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \cos^2(\kappa_2 h_2) - \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \sin^2(\kappa_2 h_2) \right)}{\frac{1}{\kappa_2} \cos(\kappa_1 h_1) \sin(2\kappa_2 h_2) + \frac{1}{\kappa_2} \sin(\kappa_1 h_1) \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} \cos^2(\kappa_2 h_2) - \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \sin^2(\kappa_2 h_2) \right)} \right\}^{1/2} \quad (2.39)$$

利用式(2.32)、(2.33)和(2.34),容易验证

$$M_{11} = M_{22} = \sqrt{1 + M_{12}M_{21}} \quad (2.40)$$

上述论证表明:一个对称的三层膜等效于一个单层薄膜,该薄膜的厚度与三层薄膜的厚度之和相等,而该单层薄膜的折射率由式(2.40)定义。以上结果显然可推广到任意多层对称薄膜的情况。

⑥ 在光学中,周期性多层薄膜结构是一种常见并极为重要的元件,所谓周期性多层薄膜是指这个结构由某些基本单元多次重复构成的系统。设这个基本单元的厚度(即周期)为 Λ ,并令一个周期对应的转移矩阵为

$$M(\Lambda) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

按照式(2.22),并考虑周期性因素,有

$$M(N\Lambda) = \underbrace{M(\Lambda)M(\Lambda)\cdots M(\Lambda)}_{N\text{次}} = [M(\Lambda)]^N \quad (2.42)$$

式中 N 为周期性多层薄膜结构的周期数,为了计算上述矩阵 $M(N\Lambda)$ 的各个元素,可利用矩阵理论中的哈密顿-凯莱定理,即任何方阵都满足它自己的久期方程。因此,按照式(2.15)可得

$$[M(\Lambda)]^2 - (m_{11} + m_{22})M(\Lambda) + E = 0 \quad (2.43)$$

式中 E 为单位矩阵。令

$$\chi = (m_{11} + m_{22})/2 \quad (2.44)$$

因此式(2.43)可改写为

$$[M(\Lambda)]^2 = 2\chi M(\Lambda) - E \quad (2.45)$$

用 $M(\Lambda)$ 乘式(2.45)两边, 并利用式(2.45), 可得

$$[M(\Lambda)]^3 = (4\chi^2 - 1)M(\Lambda) - 2\chi E$$

再用 $M(\Lambda)$ 乘上式两边, 重复以上过程, 得

$$[M(\Lambda)]^4 = (8\chi^3 - 4\chi)M(\Lambda) - (4\chi^2 - 1)E$$

$$[M(\Lambda)]^5 = (16\chi^4 - 12\chi^2 + 1)M(\Lambda) - (8\chi^3 - 4\chi)E$$

\vdots

于是得到一个递推公式

$$[M(\Lambda)]^N = U_{N-1}(\chi)M(\Lambda) - U_{N-2}(\chi)E \quad (2.46)$$

式中, $U_N(\chi)$ 是第二类切比雪夫(Chebyshev)多项式

$$U_N(\chi) = \frac{\sin[(N+1)\arccos \chi]}{\sqrt{1-\chi^2}} \quad (2.47)$$

式(2.46)可用矩阵表示, 即

$$\begin{aligned} M(N\Lambda) &= [M(\Lambda)]^N = \\ &U_{N-1}(\chi) \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} - U_{N-2}(\chi) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} m_{11}U_{N-1}(\chi) - U_{N-2}(\chi) & m_{12}U_{N-1}(\chi) \\ m_{21}U_{N-1}(\chi) & m_{22}U_{N-1}(\chi) - U_{N-2}(\chi) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.48)$$

设

$$M(\Lambda) = \begin{bmatrix} \cos \kappa \Lambda & \frac{f}{\kappa} \sin \kappa \Lambda \\ -\frac{\kappa}{f} \sin \kappa \Lambda & \cos \kappa \Lambda \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

则由式(2.48)可得

$$M(N\Lambda) = \begin{bmatrix} \cos(N\kappa\Lambda) & \frac{f}{\kappa} \sin(N\kappa\Lambda) \\ -\frac{\kappa}{f} \sin(N\kappa\Lambda) & \cos(N\kappa\Lambda) \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

⑦ 转移矩阵的逆阵由下式定义, 即

$$MM^{-1} = E \quad (2.51)$$

利用性质①和性质⑤,即

$$m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = 1$$

$$m_{11} = m_{22}$$

可得

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

利用转移矩阵的逆阵,可得到反向的传递关系。在式(2.6)两边分别左乘一个转移矩阵 $M(h)$ 的逆阵,则可得

$$\begin{bmatrix} E_y(0) \\ E'_y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\kappa h) & -\frac{1}{\kappa} \sin(\kappa h) \\ \kappa \sin(\kappa h) & \cos(\kappa h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y(h) \\ E'_y(h) \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

同样,对 TM 波也有类似的关系

$$\begin{bmatrix} H_y(0) \\ \frac{1}{n_3^2} H'_y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\kappa h) & -\frac{n_1^2}{\kappa} \sin(\kappa h) \\ \frac{\kappa}{n_1^2} \sin(\kappa h) & \cos(\kappa h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_y(h) \\ \frac{1}{n_2^2} H'_y(h) \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

由于转移矩阵及其逆阵是互为逆矩阵的关系,因此在今后的应用中都称为转移矩阵,差别在于究竟是正向还是反向传递。在某些场合下,利用反向传递关系式(2.53)和(2.54)十分方便,这点将在本书渐变折射率光波导这一章中得到引证。

⑧ 在金属薄膜波导和金属覆盖介质波导中,薄膜中的振荡场可转化为两个指数函数场的叠加,横向波数 κ 转化为衰减系数 α ,即有

$$\kappa = i\alpha \quad (2.55)$$

利用恒等式

$$\left. \begin{aligned} \sin(ix) &= i \sinh(x) \\ \cos(ix) &= \cosh(x) \end{aligned} \right\} \quad (2.56)$$

则转移矩阵式(2.7)转化成如下形式

$$M(h) = \begin{bmatrix} \cosh(\alpha h) & \frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha h) \\ \alpha \sinh(\alpha h) & \cosh(\alpha h) \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

而上述转移矩阵的逆转化成如下形式

$$M^{-1}(h) = \begin{bmatrix} \cosh(ah) & -\frac{1}{a}\sinh(ah) \\ -a\sinh(ah) & \cosh(ah) \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

对 TM 模,也有相应的转化矩阵,这里不再例举。

2.3 模式本征方程

对于图 2.1 所示的折射率分布,波导中传输的 TE 波在覆盖层和衬底中的横向电场分布可由下式表示:

$$E_y(x) = \begin{cases} A \exp(qx) & -\infty < x < 0 \\ D \exp[-p(x-h)] & h < x < +\infty \end{cases} \quad (2.59)$$

由上式可得

$$\left. \begin{aligned} E_y(0) &= A \\ E'_y(0) &= qA \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

$$\left. \begin{aligned} E_y(h) &= D \\ E'_y(h) &= -pD \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

将式(2.60)和(2.61)两式代入方程(2.6),可得

$$D \begin{bmatrix} 1 \\ -p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\kappa h) & \frac{1}{\kappa} \sin(\kappa h) \\ -\kappa \sinh(\kappa h) & \cosh(\kappa h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ q \end{bmatrix} A$$

上式两边同时乘以行矩阵 $[p \ 1]$,可得方程

$$[p \ 1] \begin{bmatrix} \cos(\kappa h) & \frac{1}{\kappa} \sin(\kappa h) \\ -\kappa \sinh(\kappa h) & \cosh(\kappa h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ q \end{bmatrix} = 0 \quad (2.62)$$

解之,即可得 TE 波的模式本征方程

$$\tan(\kappa h) = \frac{p+q}{\kappa(1-pq/\kappa^2)} \quad (2.63)$$

上式就是第一章中的式(1.67)。因此,式(2.62)可以称为矩阵形式的 TE 波的模式本征方程。利用完全相似的步骤,并考虑到 TM 波的边

界条件,可得 TM 波的矩阵形式的模式本征方程

$$\begin{bmatrix} \frac{p}{n_2^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\kappa h) & \frac{n_1^2}{\kappa} \sin(\kappa h) \\ -\frac{\kappa}{n_1^2} \sin(\kappa h) & \cos(\kappa h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{n_3^2} q \end{bmatrix} = 0 \quad (2.64)$$

容易验证,式(2.64)与方程(1.78)是完全等价的。

矩阵形式的模式本征方程意义明确,十分简洁,可避免繁琐的代数运算,具有明显的可操作性。在处理多层平板波导和渐变折射率光波导时,矩阵形式的模式本征方程将显示十分强大的生命力。

若利用反向传递的形式,式(2.62)和(2.64)可分别改写为

$$\begin{bmatrix} -q & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\kappa h) & -\frac{1}{\kappa} \sin(\kappa h) \\ \kappa \sin(\kappa h) & \cos(\kappa h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -p \end{bmatrix} = 0 \quad (2.65)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{q}{n_3^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\kappa h) & -\frac{n_1^2}{\kappa} \sin(\kappa h) \\ \frac{\kappa}{n_1^2} \sin(\kappa h) & \cos(\kappa h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{n_2^2} q \end{bmatrix} = 0 \quad (2.66)$$

参考文献

- [2.1] M. 玻恩, E. 沃耳夫. 光学原理. 北京: 科学出版社, 1978.
- [2.2] A. Yariv. Quantum Electronics. 2nd ed. New York: Wiley & Sons, 1975.
- [2.3] R. Jacobsson. Prog. in Opt., V. 5. In: E. Wolf ed. Sweden: Wiley & Sons, 1965.

第3章 多层平板波导

3.1 引言

由于多层平板波导在模场分布、模式截止和功率约束等方面具有许多独特的性质,因此,这种结构在半导体激光器、光波导耦合器、光波导偏振器以及光波导倍频器等光电子装置中有着重要的应用。此外,非对称多层平板波导的理论也是分析渐变折射率波导的重要基础。本章利用转移矩阵理论,首先分析非对称四层平板波导和非对称多层平板波导的色散性质,然后再讨论对称平板波导及其重要特性,最后分析多沟道波导的性质。

3.2 非对称多层平板波导

3.2.1 非对称四层平板波导^[3.1]

考虑折射率分布如图 3.1 所示的一般四层平板波导。折射率为 n_1 的区域是约束电磁场能量的导波层,它的厚度为 h_1 ,当然在一定条件下,厚度为 h_2 、折射率为 n_2 的区域也能约束电磁场能量。覆盖层和衬底的折射率分别为 n_0 和 n_3 。讨论的范围限制在 $n_1 > n_2 > n_3 > n_0$ 以及 TE 波的情况。这时传播常数 β 可有两种选择,下面分别加以讨论。

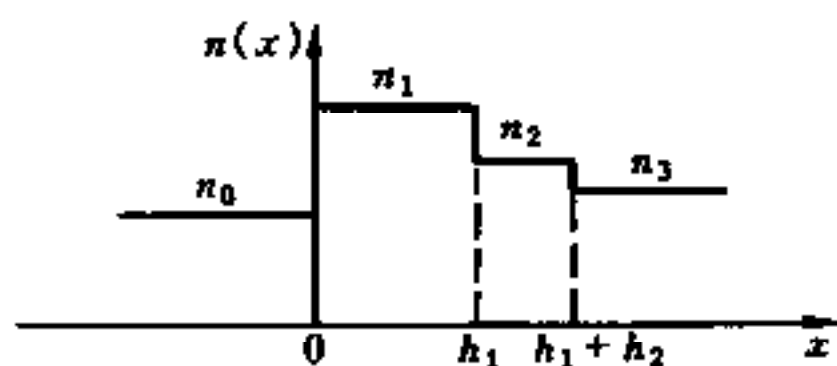


图 3.1 非对称四层平板波导的折射率分布

(1) $k_0 n_2 > \beta > k_0 n_3$ 对于这种情况,可知导波层位于 $(0, h_1 + h_2)$ 的范围,即在中间两层薄膜中电磁场都是振荡的,而在覆盖层和衬底中,电磁场是指数衰减的。根据第 2 章的理论,立刻可写出矩阵形式

的模式本征方程:

$$[-p_0 \quad 1] M_1 M_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -p_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.1)$$

式中

$$M_1 = \begin{bmatrix} \cos(\kappa_1 h_1) & -\frac{1}{k_1} \sin(\kappa_1 h_1) \\ \kappa_1 \sin(\kappa_1 h_1) & \cos(\kappa_1 h_1) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \cos(\kappa_2 h_2) & -\frac{1}{k_2} \sin(\kappa_2 h_2) \\ \kappa_2 \sin(\kappa_2 h_2) & \cos(\kappa_2 h_2) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= (k_0^2 n_1^2 - \beta^2)^{1/2} \\ \kappa_2 &= (k_0^2 n_2^2 - \beta^2)^{1/2} \\ p_0 &= (\beta^2 - k_0^2 n_0^2)^{1/2} \\ p_3 &= (\beta^2 - k_0^2 n_3^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

由式(3.2)和(3.3),非对称四层平板波导的模式本征方程(3.1)可写成较为熟悉的形式

$$\kappa_1 h_1 = m\pi + \arctan\left(\frac{p_0}{\kappa_1}\right) + \arctan\left(\frac{p_2}{\kappa_1}\right) \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.5)$$

式中

$$p_2 = \kappa_2 \tan\left[\arctan\left(\frac{p_3}{\kappa_2}\right) - \kappa_2 h_2\right] \quad (3.6)$$

令

$$\Phi_2 = \arctan\left(\frac{p_2}{\kappa_2}\right) \quad (3.7)$$

由式(3.6),可得

$$\kappa_2 h_2 + \Phi_2 = m'\pi + \arctan\left(\frac{p_3}{\kappa_2}\right) \quad (m' = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.8)$$

而

$$\arctan^{-1}\left(\frac{p_2}{\kappa_1}\right) = \arctan\left[\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\tan(\Phi_2)\right] \quad (3.9)$$

联合式(3.5)、(3.8)和(3.9),可得:

$$\kappa_1 h_1 + \kappa_2 h_2 + \Phi(s) = m\pi + \arctan\left(\frac{p_0}{\kappa_1}\right) + \arctan\left(\frac{p_3}{\kappa_2}\right) \quad (3.10)$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots)$$

式中

$$\Phi(s) = \Phi_2 - \arctan\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\tan\Phi_2\right) \quad (3.11)$$

考虑方程(3.10),发现该方程与简单三层平板波导的模式本征方程(1.15)十分类似,除了一项 $\Phi(s)$ 之外,其他各项的意义是非常清楚的。为看清 $\Phi(s)$ 的物理意义,我们讨论 $\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2} \ll 1$ 的情况,此时显然导致 $\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1} \ll 1$ 。于是,利用微分公式,可得

$$\arctan\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\tan\Phi_2\right) = \arctan\left[\left(1 - \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1}\right)\tan\Phi_2\right] \approx$$

$$\Phi_2 - \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2\kappa_1}\sin 2\Phi_2 \quad (3.12)$$

则由式(3.11),得到

$$\Phi(s) = \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2\kappa_1}\sin 2\Phi_2 \quad (3.13)$$

在一阶近似下,式(3.13)右边的振幅满足:

$$\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2\kappa_1} \approx \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \quad (3.14)$$

而上式右边一项表示光从 n_1 介质射向 n_2 介质时的反射系数。因此, $\Phi(s)$ 可理解为一阶反射子波的位相贡献。当然,若利用精确的式(3.11), $\Phi(s)$ 则代表所有反射子波的位相贡献。显然,当 $n_1 = n_2$ 时,有 $\Phi(s) = 0$ 。由以上分析可见, $\Phi(s)$ 是由两种介质界面引起的一个反射量,该量的大小由两种介质的折射率差决定。折射率差大,则 $\Phi(s)$ 也大;折射率差小,则 $\Phi(s)$ 也小。

综合上述分析,可得以下重要结论:对多层平板波导,不仅要考虑主波的位相贡献,而且要考虑层间反射子波的位相贡献。

(2) $k_0 n_1 > \beta > k_0 n_2$ 对于这种情况,可知导波层位于 $(0, h_1)$ 的范围,即在此范围内电磁场是振荡的,而在其他区域电磁场是衰减的。模式本征方程仍取式(3.1)的形式,但式(3.3)中的 κ_2 可表示为

$$\kappa_2 = i(\beta^2 - k_0^2 n_2^2)^{1/2} = i\alpha_2 \quad (3.15)$$

相应的正弦和余弦函数变为双曲正弦和双曲余弦函数。即有

$$\sin(\kappa_2 h_2) = i \sinh(\alpha_2 h_2), \cos(\kappa_2 h_2) = \cosh(\alpha_2 h_2)。$$

转移矩阵 M_2 则变成

$$M_2 = \begin{bmatrix} \cosh(\alpha_2 h_2) & -\frac{1}{\alpha_2} \sinh(\alpha_2 h_2) \\ -\alpha_2 \sinh(\alpha_2 h_2) & \cosh(\alpha_2 h_2) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

模式本征方程与式(3.5)完全一致,而 p_2 的定义式应改为

$$p_2 = \alpha_2 \tanh \left[\operatorname{artanh} \left(\frac{p_3}{\alpha_2} \right) + \alpha_2 h_2 \right] \quad (3.17)$$

3.2.2 非对称多层平板波导

对于如图 3.2 所示的非对称 $l+2$ 层平板波导,只要推广上节的结果,便可得到 TE 波的矩阵形式的模式本征方程:

$$[-p_0 \quad 1] \prod_{i=1}^l M_i \begin{bmatrix} 1 \\ -p_{l+1} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.18)$$

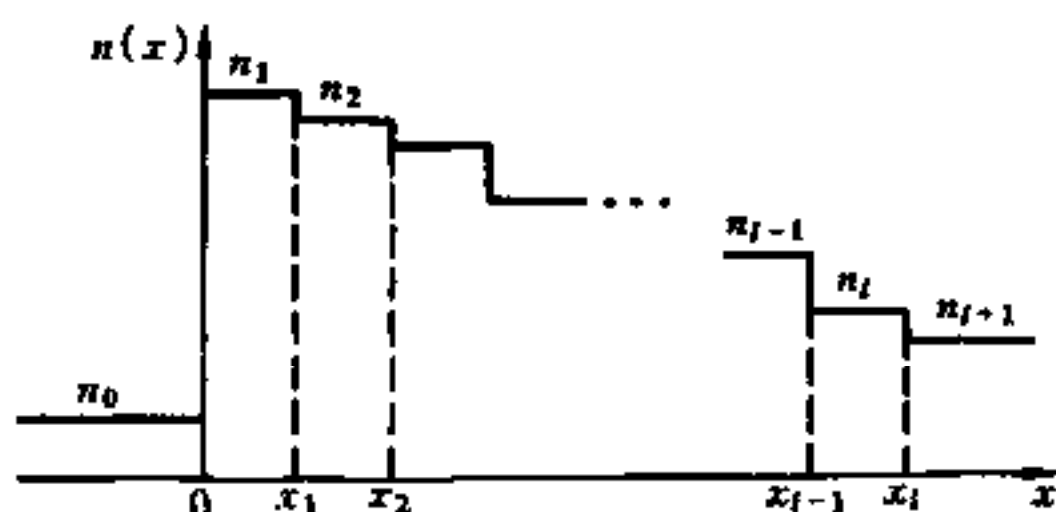


图 3.2 非对称 $l+2$ 层平板波导的折射率分布

式中,相应于第 i 层薄膜的转移矩阵 M_i 由下式表示:

$$M_i = \begin{bmatrix} \cos(\kappa_i h_i) & -\frac{1}{\kappa_i} \sin(\kappa_i h_i) \\ \kappa_i \sin(\kappa_i h_i) & \cos(\kappa_i h_i) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

式中

$$\begin{cases} \kappa_i = (k_0^2 n_i^2 - \beta^2)^{1/2} \\ p_0 = (\beta^2 - k_0^2 n_0^2)^{1/2} \\ p_{l+1} = (\beta^2 - k_0^2 n_{l+1}^2)^{1/2} \end{cases}$$

化简式(3.18),易得

$$\begin{aligned} \kappa_1 h_1 &= m\pi + \arctan\left(\frac{p_0}{\kappa_1}\right) + \arctan\left(\frac{p_2}{\kappa_1}\right) \\ (m &= 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (3.20)$$

式中,

$$\begin{aligned} p_i &= \kappa_i \tan \left[\arctan\left(\frac{p_{i+1}}{\kappa_i}\right) - \kappa_i h_i \right] \\ i &= (2, 3, \dots, l) \end{aligned} \quad (3.21)$$

式(3.20)和(3.21)完全确定了非对称多层平板波导的色散性质。其中式(3.21)是递推公式,在 p_{l+1} 已知的情况下,才可求得 p_l ,并以此类推,最终才可求得 p_2 。容易看出,当 $l=2$ 时,多层平板波导退化为简单的四层平板波导,而式(3.21)也退化为与四层平板波导相应的式(3.6)。

为区别主波与子波的位相关系,作类似上节的处理,令

$$\Phi_i = \arctan\left(\frac{p_i}{\kappa_i}\right) \quad (3.22)$$

则由式(3.21),可得

$$\begin{aligned} \Phi_i &= m_i \pi + \arctan\left(\frac{p_{i+1}}{\kappa_i}\right) - \kappa_i h_i = \\ &= m_i \pi + \arctan\left(\frac{\kappa_{i+1}}{\kappa_i} \tan \Phi_{i+1}\right) - \kappa_i h_i \\ (m_i &= 0, 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, l-1) \end{aligned} \quad (3.23)$$

整理式(3.23),写成如下形式:

$$\kappa_i h_i + \left[\Phi_{i+1} - \arctan\left(\frac{\kappa_{i+1}}{\kappa_i} \tan \Phi_{i+1}\right) \right] = m_i \pi + (\Phi_{i+1} - \Phi_i) \\ (m_i = 0, 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, l-1) \quad (3.24)$$

当 $i=l$ 时,有

$$\kappa_l h_l = m_l \pi + \arctan\left(\frac{p_{l+1}}{\kappa_l}\right) - \Phi_l \quad (3.25)$$

利用式(3.24)和(3.25),并对 i 求和,可得:

$$\sum_{i=1}^l \kappa_i h_i + \sum_{i=1}^{l-1} \left[\Phi_{i+1} - \arctan\left(\frac{\kappa_{i+1}}{\kappa_i} \tan \Phi_{i+1}\right) \right] = \\ m \pi + \arctan\left(\frac{p_{l+1}}{\kappa_l}\right) - \Phi_1 \quad (3.26)$$

而

$$\Phi_1 = m_1 \pi + \arctan\left(\frac{p_2}{\kappa_1}\right) - \kappa_1 h_1 \quad (3.27)$$

利用式(3.20),易得

$$\Phi_1 = m_1 \pi - \arctan\left(\frac{p_0}{\kappa_1}\right) \quad (3.28)$$

于是,式(3.26)变为

$$\sum_{i=1}^l \kappa_i h_i + \Phi(s) = m \pi + \arctan\left(\frac{p_0}{\kappa_1}\right) + \arctan\left(\frac{p_{l+1}}{\kappa_l}\right) \\ (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.29)$$

式中

$$\Phi(s) = \sum_{i=1}^{l-1} \left[\Phi_{i+1} - \arctan\left(\frac{\kappa_{i+1}}{\kappa_i} \tan \Phi_{i+1}\right) \right] \quad (3.30)$$

当 $l=2$ 时,方程(3.29)退化为四层波导的模式本征方程(3.10),而当 $l=1$ 时,方程(3.29)退化为简单三层平板波导的模式本征方程。式(3.29)是适用于任意多层平板波导的模式本征方程,它不仅具有物理意义清晰的特点,而且在推导过程中不涉及任何近似,利用它可给出精确的数值结果。

以上讨论虽然仅限于 $\beta < k_0 n_l$ 的情况, 即电磁场所有的薄膜中都是振荡的。但对于 $\beta > k_0 n_j$ 的情况, 这时从第 j 层开始以后的薄膜中, 电磁场都是衰减的。模式本征方程(3.29)仍然成立, 只需将 κ_j 改为 $i\alpha_j$ 即可。对于 TM 波的情况, 读者可利用第 2 章中给出的理论自行推导。

3.3 对称多层平板波导

3.3.1 对称三层平板波导

对称三层平板波导的折射率分布如图 3.3 所示。衬底和覆盖层的折射率均为 n_0 , 折射率为 n_1 的导波层的厚度设为 $2h$ 。模式本征方程为

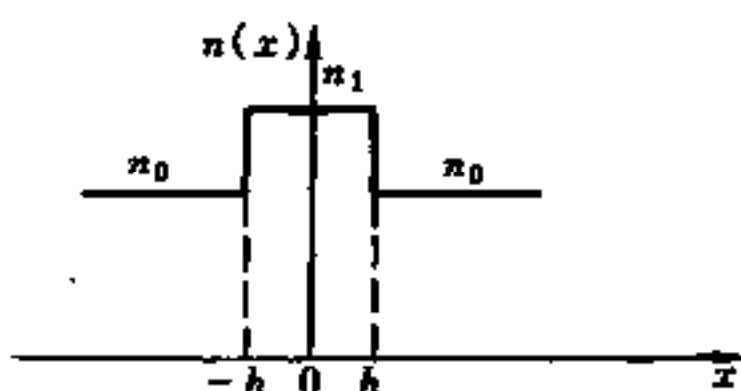


图 3.3 对称三层平板波导的折射率分布

$$[-p_0 \quad 1]M \begin{bmatrix} 1 \\ -p_0 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.31)$$

式中

$$M = \begin{bmatrix} \cos(2\kappa_1 h) & -\frac{1}{\kappa_1} \sin(2\kappa_1 h) \\ \kappa_1 \sin(2\kappa_1 h) & \cos(2\kappa_1 h) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

而

$$p_0 = (\beta^2 - k_0^2 n_0^2)^{1/2}$$

$$\kappa_1 = (k_0^2 n_1^2 - \beta^2)^{1/2}$$

化简式(3.31), 可得:

$$2\kappa_1 h = m\pi + 2\arctan\left(\frac{p_0}{\kappa_1}\right) \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.33)$$

对偶数阶模, 式(3.33)可简化为:

$$\tan(\kappa_1 h) = \frac{p_0}{\kappa_1} \quad (3.34)$$

而对奇数阶模,式(3.33)变为

$$\cot(\kappa_1 h) = -\frac{p_0}{\kappa_1} \quad (3.35)$$

3.3.2 对称五层平板波导

对称五层平板波导的各层厚度和折射率分布如图 3.4 所示。讨论的范围限制在 $n_1 > n_2 > n_3$ 的情况,且假设 $k_0 n_2 \geq \beta \geq k_0 n_3$ 。根据上

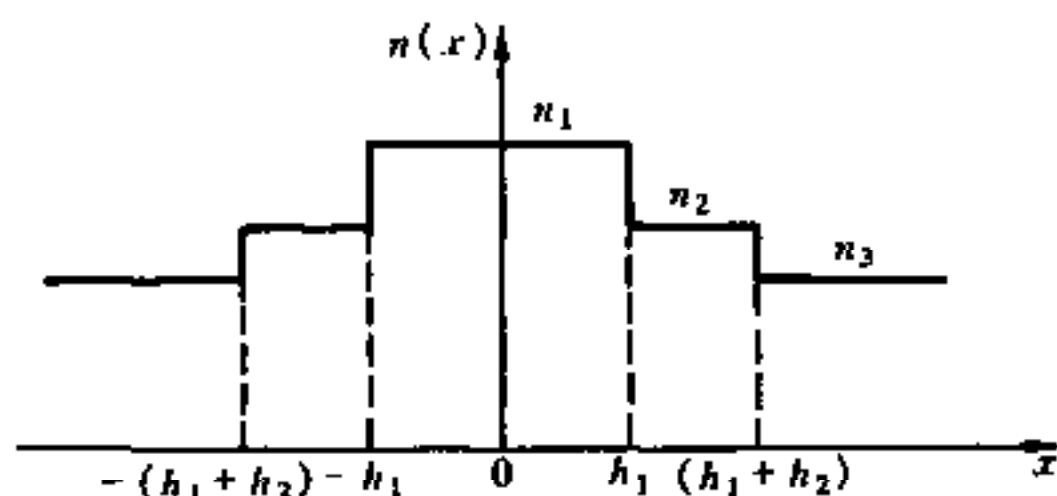


图 3.4 对称五层平板波导的折射率分布

节的分析,立即可得对称五层平板波导矩阵形式的模式本征方程为

$$\begin{bmatrix} -p_3 & 1 \end{bmatrix} M_2 M_1 M_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -p_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.36)$$

式中

$$M_1 = \begin{bmatrix} \cos(2\kappa_1 h_1) & -\frac{1}{\kappa_1} \sin(2\kappa_1 h_1) \\ \kappa_1 \sin(2\kappa_1 h_1) & \cos(2\kappa_1 h_1) \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \cos(\kappa_2 h_2) & -\frac{1}{\kappa_2} \sin(\kappa_2 h_2) \\ \kappa_2 \sin(\kappa_2 h_2) & \cos(\kappa_2 h_2) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

而

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= (k_0^2 n_1^2 - \beta^2)^{1/2} \\ \kappa_2 &= (k_0^2 n_2^2 - \beta^2)^{1/2} \\ p_3 &= (\beta^2 - k_0^2 n_3^2)^{1/2} \end{aligned}$$

利用式(3.38),方程(3.36)可简化成

$$[-p_2 \quad 1]M_1\begin{bmatrix} 1 \\ -p_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.39)$$

式中

$$p_2 = \kappa_2 \tan \left[\arctan \left(\frac{p_3}{\kappa_2} \right) - \kappa_2 h_2 \right] \quad (3.40)$$

上述方程与对称三层平板波导的方程(3.31)完全类似,故可借用上节的结果,得

$$2\kappa_1 h_1 = m\pi + 2\arctan \left(\frac{p_2}{\kappa_1} \right) \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.41)$$

对偶数阶模,有

$$\tan(\kappa_1 h_1) = \frac{p_2}{\kappa_1} \quad (3.42)$$

对奇数阶模,则有

$$\cot(\kappa_1 h_1) = -\frac{p_2}{\kappa_1} \quad (3.43)$$

利用上述方法,完全可把以上结果推广到对称 $2k+1$ (k 为正整数)层平板波导,而且所得模式本征方程的形式与三层平板波导完全一致,不同之处仅在于 p_2 的定义,读者可参照对称和非对称平板波导的处理方法自行推导。

为深入了解对称五层平板波导的性质及其应用潜力,定义以下归一化变量:

$$V^2 = k_0^2 h_1^2 (n_1^2 - n_3^2) \quad (3.44)$$

$$u^2 = k_0^2 h_1^2 (n_1^2 - N^2) = \kappa_1^2 h_1^2 \quad (3.45)$$

$$w^2 = k_0^2 h_1^2 (N^2 - n_3^2) = V^2 - u^2 = p_3^2 h_1^2 \quad (3.46)$$

$$t^2 = k_0^2 h_1^2 (n_2^2 - N^2) = u^2 - V^2 c^2 = \kappa_2^2 h_1^2 \quad (3.47)$$

式中,

$$c^2 = \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_3^2} \quad (3.48)$$

$$N = \beta/k_0 \quad (3.49)$$

为简单起见,以下讨论仅考虑偶阶模。利用上述归一化变量,代入方程(3.42),可得:

$$u = M\pi + \arctan \left\{ \frac{t}{u} \tan \left[\arctan \left(\frac{w}{t} \right) - t \left(\frac{h_2}{h_1} \right) \right] \right\} \\ (M = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.50)$$

上式是在 $c \leq u/V \leq 1$, 即 $(k_0 n_2 \geq \beta \geq k_0 n_3)$ 情况下, 对称五层平板波导偶阶模的模式本征方程。利用数值计算, 不难得到各种参数(c 和 $(h_1 + h_2)/h_1$) 下, u 和 V 的关系曲线。

五层平板波导约束电磁场的能力在一定条件下比三层平板波导强, 利用这个性质可以制成性能良好的半导体激光器。为了说明这一点, 下面计算功率约束因子 Γ , 即波导芯子功率占总功率的百分比。波导芯子是指厚度为 $2h_1$ 的中心薄膜。定义

$$\Gamma = \int_0^{h_1} |E_y|^2 dx / \int_0^\infty |E_y|^2 dx \quad (3.51)$$

利用第1章中给出的 TE 模的场分布, 代入式(3.51), 并应用归一化变量, 可得

$$\Gamma = \frac{u + \sin u \cos u}{u + \sin u \cos u \left(1 - \frac{u^2}{t^2} \right) + u \left(\cos^2 u + \frac{u^2}{t^2} \sin^2 u \right) \left(\frac{h_2}{h_1} + \frac{1}{w} \right)} \quad (3.52)$$

当参数 $c^2 = 1/3$, $(h_1 + h_2)/h_1 = 2, 4, 8$ 时, 基模 ($m = 0$) 的功率约束因子 Γ 与归一化频率 V 的关系曲线(实线)如图 3.5 所示, 图中虚线为 $h_2 = 0$ 时的对称三层平板波导的 $\Gamma - V$ 曲线。从图中可以看出, 当 V 较小时, 五层结构的 Γ 比三层平板波导的大。这个性质对改善半导体激光器的性能是十分诱人的。由于半导体激光器的阈值电流与功率约束因子成正比, 因此, 利用五层结构, 可降低半导体激光器的阈值电流, 这对半导体激光器驱动电源的小型化是十分有利的^[3.2]。

3.3.3 W 型波导^[3.3]

在对称五层平板波导中, 若有 $n_1 > n_3 > n_2$, 则归一化参量 $c^2 > 1$ 。

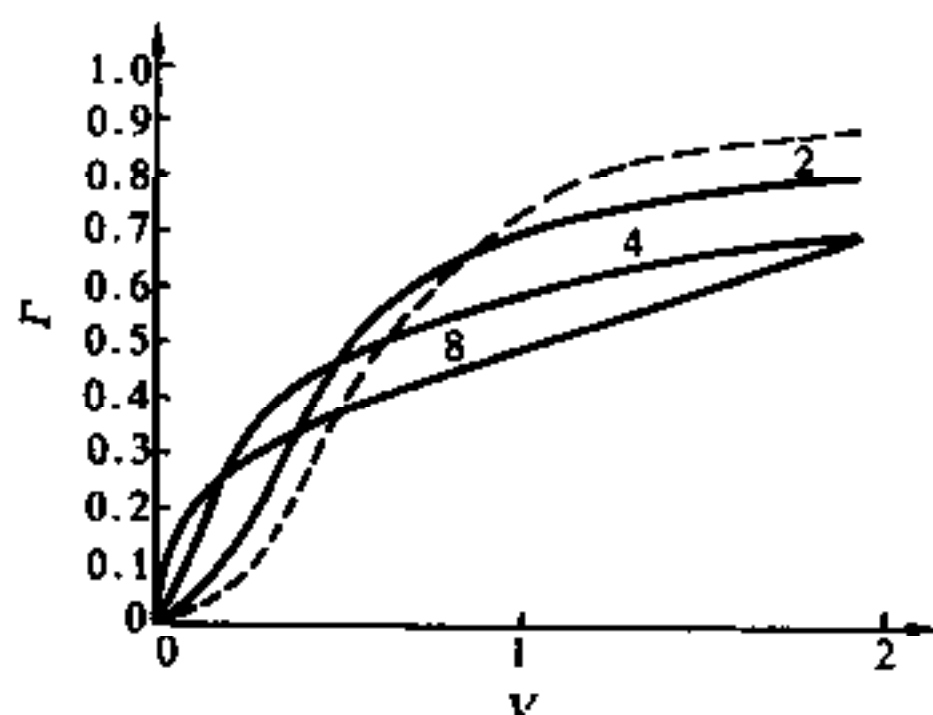


图 3.5 基模的功率约束因子 Γ 与归一化频率 V 的曲线

由于这种结构的折射率分布类似于字母 W 的形状, 因此这种结构被称为 W 型波导。(见图 3.6)

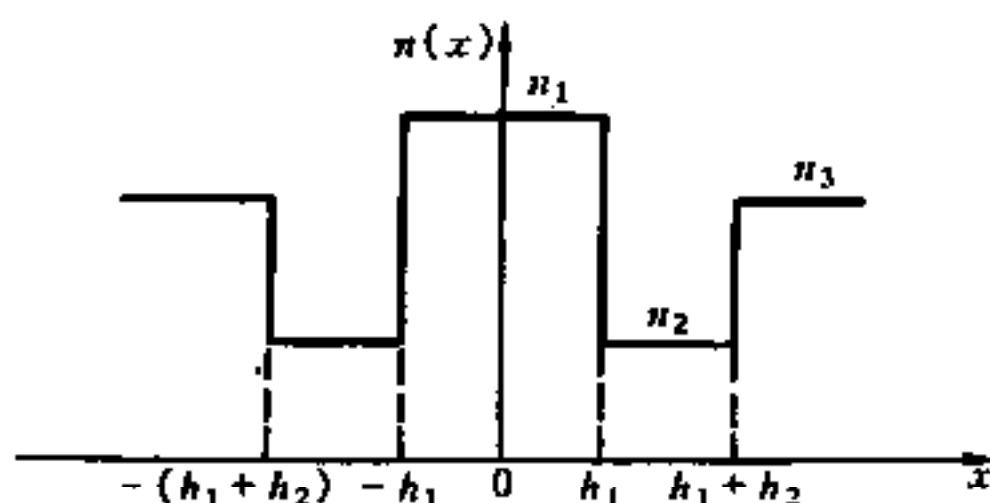


图 3.6 W 型波导的折射率分布

W 型波导的特殊结构决定了该波导在模截止以及功率约束等方面具有特别的性质。这种波导的传播常数满足 $k_0 n_1 \geq \beta \geq k_0 n_2$ 的范围, 用归一化参数可表示为 $0 \geq u/V \geq c$ 。它的矩阵形式的模式本征方程与式(3.36)相同, 但矩阵 M_2 的形式变为

$$M_2 = \begin{bmatrix} \cosh(\alpha_2 h_2) & -\frac{1}{\alpha_2} \sinh(\alpha_2 h_2) \\ -\alpha_2 \sinh(\alpha_2 h_2) & \cosh(\alpha_2 h_2) \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

式中

$$\alpha_2 = (\beta^2 - k_0^2 n_2^2)^{1/2} \quad (3.54)$$

化简矩阵方程, 可得形式与式(3.41)完全一致的方程, 但参数 p_2

应改为如下形式,即

$$p_2 = a_2 \tanh \left[\operatorname{artanh} \left(\frac{p_3}{a_2} \right) + a_2 h_2 \right] \quad (3.55)$$

为了找出零阶模单独传输的 V 值范围,首先分析一阶模的截止条件。利用上节的方法,并采用归一化参数,可以导出奇数阶模的本征方程

$$u = \left(M + \frac{1}{2} \right) \pi + \arctan \left\{ \frac{s}{u} \tanh \left[\operatorname{artanh} \left(\frac{w}{s} \right) + s \frac{h_2}{h_1} \right] \right\} \quad (3.56)$$

$$(M = 0, 1, 2, \dots)$$

式中, $m = 2M + 1$; 而归一化变量 s 的定义为

$$s^2 = k_0^2 h_1^2 (N^2 - n_2^2) = V^2 c^2 - u^2 = a_2^2 h_1^2 \quad (3.57)$$

一阶模 ($m = 1, M = 0$) 截止时, $w = 0, u = V_c$, 而 $s = V_c (c^2 - 1)^{1/2}$, 因此, 方程 (3.56) 变为

$$-\cot V_c = (c^2 - 1)^{1/2} \tanh \left[V_c (c^2 - 1)^{1/2} \frac{h_2}{h_1} \right] \quad (3.58)$$

在各种不同的 c^2 下, W 型波导的一阶模的截止值 V_c 与薄膜厚度比 h_2/h_1 的关系曲线如图 3.7 所示。当薄膜厚度比 $h_2/h_1 = 0$ 时, 类似于

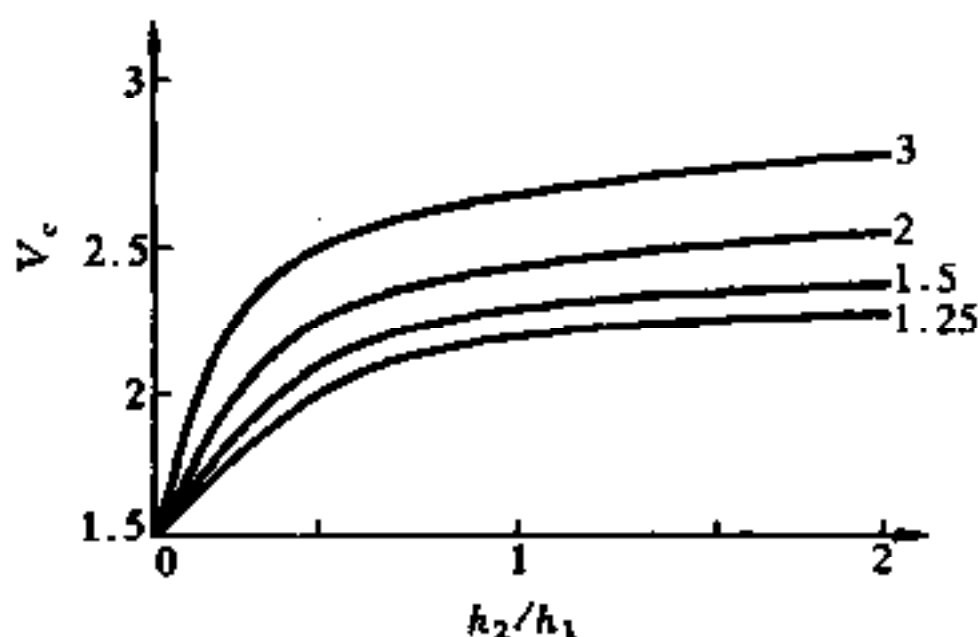


图 3.7 W 型波导一阶模的截止值 V_c 与薄膜厚度比 h_2/h_1 的关系曲线

三层平板波导的情况, 这时有 $V_c = \pi/2$, 随着厚度比 h_2/h_1 和 c 的增加, 截止值 V_c 也单调增加。一阶模截止值的增加意味着单模传输的薄膜厚度或芯子与包层的折射率差可以适当地增加, 从而减轻了制备

工艺的压力。随着 h_2/h_1 的增加, V_c 值趋于一个极限值; 当 $h_2/h_1 \rightarrow \infty$ 时, 方程(3.43)变为

$$\cot V_c = -(c^2 - 1)^{1/2} \quad (3.59)$$

不难看出, 当 $c \rightarrow \infty$ 时, 截止值 V_c 具有极大值 $V_c = \pi$ 。因此, 在单模传输条件下, 对于相同的芯子与包层折射率差, W 型波导的芯子宽度可以是通常对称三层平板波导芯子宽度的两倍

W 型波导零阶模的功率约束因子也具有特殊的性质。为此我们必须导出 W 型波导偶数阶模的模式本征方程。这方程即为 $0 \geq u/V \geq c$ 情况下, 对称五层平板波导的偶数阶模的模式本征方程。不难导出

$$u = M\pi + \arctan \left\{ \frac{s}{u} \tanh \left[\operatorname{artanh} \left(\frac{w}{s} \right) + s \frac{h_2}{h_1} \right] \right\} \quad (3.60)$$

$$(M = 0, 1, 2, \dots)$$

M 与 m 的关系为 $m = 2M$ 。

零阶模的功率约束因子为

$$\Gamma = \frac{u + \sin u \cos u}{u + \sin u \cos u \left(1 + \frac{u^2}{s^2} \right) + u \left(\cos^2 u - \frac{u^2}{s^2} \right) \left(\frac{h_2}{h_1} + \frac{1}{w} \right)} \quad (3.61)$$

利用式(3.61), 可以算出当 $h_2/h_1 = 0.5$ 时, 对于各种不同的 c^2 , 功率

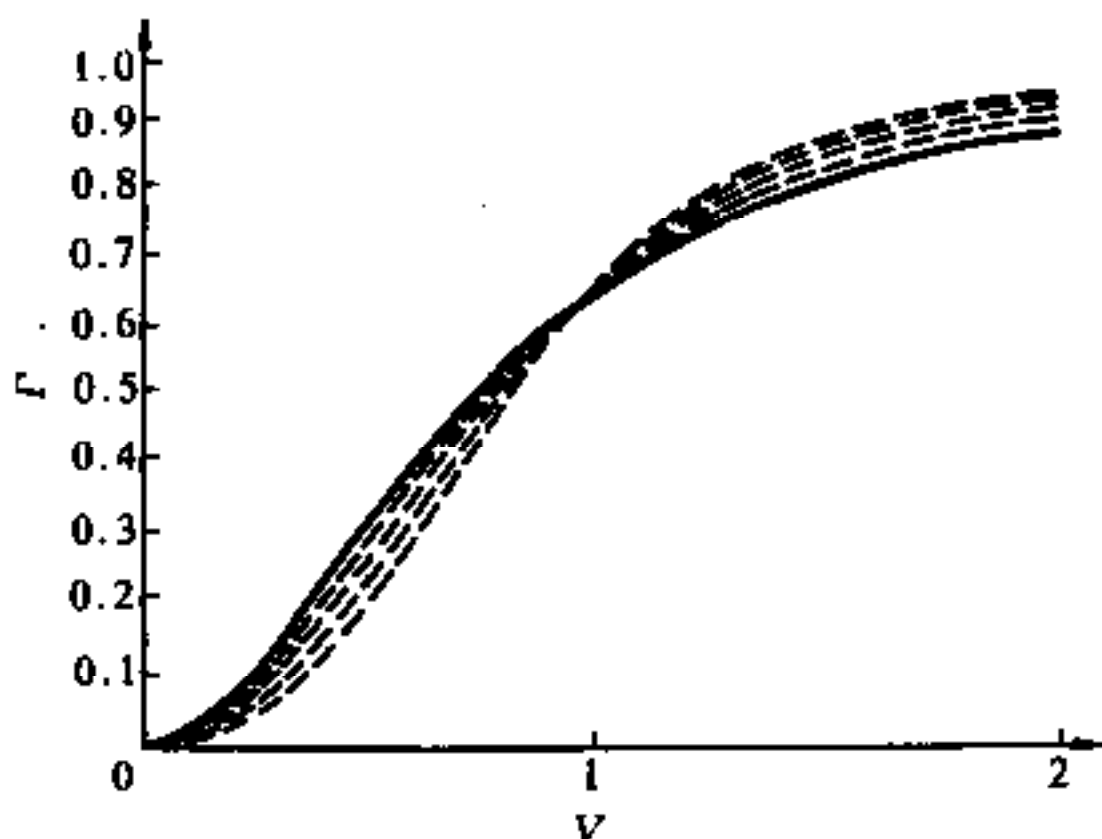


图 3.8 W 型波导的零阶模的功率约束因子 Γ 与归一化频率 V 的关系曲线

约束因子 Γ 与归一化频率 V 的关系曲线(实线)如图 3.8 所示。为了比较,图中也画出了对称三层平板波导($h_2/h_1=0$)的 $\Gamma-V$ 关系曲线(虚线)。由图可以看出,当 V 较小时,三层平板波导的功率约束因子 Γ 较大,这个事实说明,当 ω 趋于零时,W 型波导中的部分电磁场将由于隧道效应,从芯子层通过低折射率(n_2)的薄膜流到波导外。然而,当 V 值大于 1 时,W 型波导的功率约束因子 Γ 有较大的值,而且这个效应将随 c 的增加而增加。这种情况说明 W 型波导中的电磁场在低折射率层很快地衰减。如果 W 型波导的外包层是有吸收的材料,则利用这种性质可避免场能的过多损耗。

对于超过五层的对称平板波导,模截止性质和功率约束因子具有更优良的性能,限于篇幅,本书不再赘述。

3.4 多沟道波导^{[3.4][3.5]}

由多层周期性薄膜组成的多沟道(Multi-Channel)波导在集成光学中具有重要的应用价值。例如,双沟道波导可用作开关、模选择器和方向耦合器等。本节利用转移矩阵先分析一种由任意多层介质构成的多层波导,然后讨论双沟道波导和多沟道波导的性质。

3.4.1 一般公式

考虑以下折射率分布描述的($N+2$)层介质波导:

$$n(x) = \begin{cases} n_0 & x < 0 \\ n_1 & 0 < x < x_1 \\ n_2 & x_1 < x < x_2 \\ \vdots & \\ n_N & x_{N-1} < x < x_N \\ n_s & x_N < x \end{cases} \quad (3.62)$$

式中, n_0 和 n_s 分别为覆盖层和衬底的折射率,第 l 层介质的厚度为 $h_l = x_l - x_{l-1}$ ($l=1,2,\dots,N$)。则对于 z 方向传输的光导波,其电场分布为(仅考虑 TE 波):

$$E_y(x) = \begin{cases} B_0 e^{a_0 x} & x < 0 \\ A_l e^{-i\kappa_l(x-x_l)} + B_l e^{i\kappa_l(x-x_l)} & x_{l-1} < x < x_l \\ A_s e^{-a_s(x-x_N)} & x_N < x \end{cases} \quad (3.63)$$

式中, $x_0=0$, 且有

$$\left. \begin{aligned} \kappa_l &= (k_0^2 n_l^2 - \beta^2)^{1/2} \\ a_0 &= (\beta^2 - k_0^2 n_0^2)^{1/2} \\ a_s &= (\beta^2 - k_0^2 n_s^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (3.64)$$

则第 l 层薄膜对应的转移矩阵为

$$M_l = \begin{bmatrix} \cos(\kappa_l h_l) & -\frac{1}{\kappa_l} \sin(\kappa_l h_l) \\ \kappa_l \sin(\kappa_l h_l) & \cos(\kappa_l h_l) \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

设整个 N 层薄膜对应的转移矩阵为

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = M_1 \cdot M_2 \cdots M_{N-1} \cdot M_N \quad (3.66)$$

根据式(2.54), 可得矩阵方程

$$\begin{bmatrix} E_y(0) \\ E'_y(0) \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} E_y(x_N) \\ E'_y(x_N) \end{bmatrix}$$

于是可得模式本征方程

$$m_{21} + a_0 a_s m_{12} - (a_0 m_{11} + a_s m_{22}) = 0 \quad (3.67)$$

对简单的芯子层厚度为 h 的三层平板波导, 有

$$M = \begin{bmatrix} \cos(\kappa h) & -\frac{1}{\kappa} \sin(\kappa h) \\ \kappa \sin(\kappa h) & \cos(\kappa h) \end{bmatrix}$$

把 M 的矩阵元代入式(3.52), 可得

$$\tan(\kappa h) = \frac{a_0 + a_s}{\kappa(1 - a_0 a_s / \kappa^2)}$$

3.4.2 有限沟道波导

以下分析有限沟道波导中传播的电磁模式,这种波导的研究对了解半导体激光二极管阵列中的超级模(super-modes)的性质是十分重要的^[3.6]。

(1) 对称型 考虑图 3.9 所示的对称型多沟道波导,它由周期性分层介质组成。其折射率分布为

$$n(x) = \begin{cases} n_2 & m\Lambda \leq x \leq m\Lambda + b \quad (m = 0, 1, 2, \dots, N-1) \\ n_1 & \text{其他} \end{cases} \quad (3.68)$$

且有

$$n_2 > n_1 \quad (3.69)$$

以 TE 波为例,设组成一个周期 Λ 的两个薄膜为基膜。由式(3.69)可知,在基膜 a 中,是两个指数衰减场的叠加;而在基膜 b 中,是两个振荡场的叠加。则基膜 b 对应的转移矩阵为

$$M_2 = \begin{bmatrix} \cos(\kappa_2 b) & -\frac{1}{\kappa_2} \sin(\kappa_2 b) \\ \kappa_2 \sin(\kappa_2 b) & \cos(\kappa_2 b) \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

式中

$$\kappa_2 = (k_0^2 n_2^2 - \beta^2)^{1/2} \quad (3.71)$$

在基膜 a 中,有

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= (k_0^2 n_1^2 - \beta^2)^{1/2} = \\ &= i(\beta^2 - k_0^2 n_1^2)^{1/2} = i\alpha_1 \end{aligned} \quad (3.72)$$

利用三角函数与双曲函数变换的恒等式

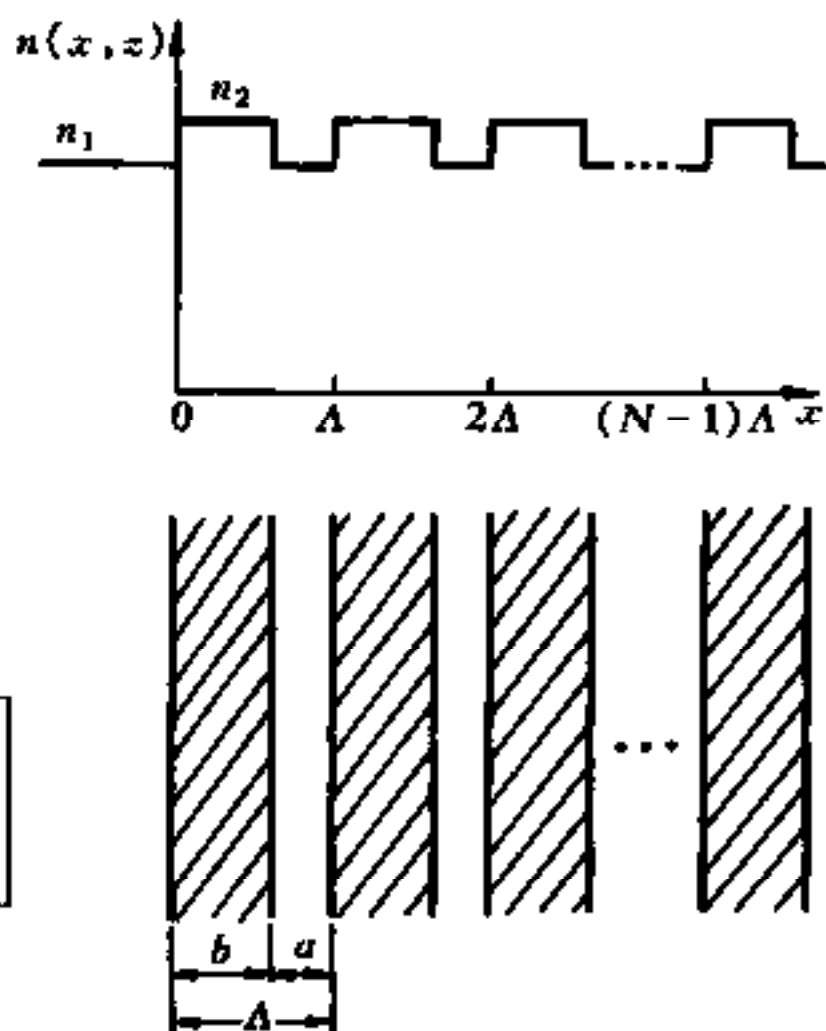


图 3.9 对称型多沟道波导 Λ

$$\left. \begin{aligned} \sin(ix) &= i\sinh(x) \\ \cos(ix) &= \cosh(x) \end{aligned} \right\} \quad (3.73)$$

则基膜 a 对应的转移矩阵可写为

$$M_1 = \begin{bmatrix} \cosh(\alpha_1 a) & -\frac{1}{\alpha_1} \sinh(\alpha_1 a) \\ -\alpha_1 \sinh(\alpha_1 a) & \cosh(\alpha_1 a) \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

于是一个周期 Λ 对应的转移矩阵为

$$M(\Lambda) = M_1 \cdot M_2 = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

式中

$$m_{11} = \cos(\kappa_2 b) \cosh(\alpha_1 a) + \frac{\alpha_1}{\kappa_2} \sin(\kappa_2 b) \sinh(\alpha_1 a) \quad (3.76)$$

$$m_{12} = -\frac{1}{\alpha_1} \cos(\kappa_2 b) \sinh(\alpha_1 a) + \frac{1}{\kappa_2} \sin(\kappa_2 b) \cosh(\alpha_1 a) \quad (3.77)$$

$$m_{21} = \kappa_2 \sin(\kappa_2 b) \cosh(\alpha_1 a) - \alpha_1 \cos(\kappa_2 b) \sinh(\alpha_1 a) \quad (3.78)$$

$$m_{22} = \cos(\kappa_2 b) \cosh(\alpha_1 a) - \frac{\kappa_2}{\alpha_1} \sin(\kappa_2 b) \sinh(\alpha_1 a) \quad (3.79)$$

根据第2章的分析,对称型多沟道波导矩阵形式的色散方程为:

$$[-\alpha_1 \quad 1] \cdot M^N(\Lambda) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\alpha_1 \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

利用式(2.42)、(2.44)、(2.47)和(2.48),式(3.80)可写成如下简单形式

$$A \frac{\sin(NK\Lambda)}{\sin(K\Lambda)} - \frac{\sin((N-1)K\Lambda)}{\sin(K\Lambda)} = 0 \quad (3.81)$$

式中, N 是沟道数;而 A 和 K 由以下两式确定

$$A = e^{\alpha_1 a} \left[\cos(\kappa_2 b) - \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa_2}{\alpha_1} - \frac{\alpha_1}{\kappa_2} \right) \sin(\kappa_2 b) \right] \quad (3.82)$$

$$\cos(K\Lambda) = \frac{1}{2} (m_{11} + m_{12}) =$$

$$\cos(\kappa_2 b) \cosh(\alpha_1 a) - \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa_2}{\alpha_1} - \frac{\alpha_1}{\kappa_2} \right) \sin(\kappa_2 b) \sinh(\alpha_1 a) \quad (3.83)$$

由式(3.71)和(3.72)可知, K 是波导传播常数 β 的函数, 因此式(3.81)和(3.83)完全确定了对称型多沟道波导的色散性质。这两式的意义是不同的, 式(3.83)是无限周期性多层介质中的色散关系, 而式(3.81)则是有限沟道波导的附加条件。

由式(3.83)可知, 存在两种可能的情况: ① 当 $|\cos(K\Lambda)| \leq 1$ 时, K 为实数, β 处于允带范围之内, 对应振荡的电磁模式。② 当 $|\cos(K\Lambda)| > 1$ 时, K 为复数, β 处于禁带, 对应的模式称为电磁表面波。

当 $K\Lambda$ 在允带中从 $m\pi$ 变化为 $(m+1)\pi$ 时, 在数学上, 方程(3.81)有 N 个零点, 每一个零点都代表一组传播常数 β 的解。在物理上, 对称型多沟道波导可看作相互靠近的 N 个相同的三层平板波导, 由于相互作用, 使得单个波导的每一个模都成为 N 度非简并模式的带。

对称型单沟道和双沟道波导的色散曲线由图(3.10)和图(3.11)所示, 比较两图, 可以看出模式的二度分裂。

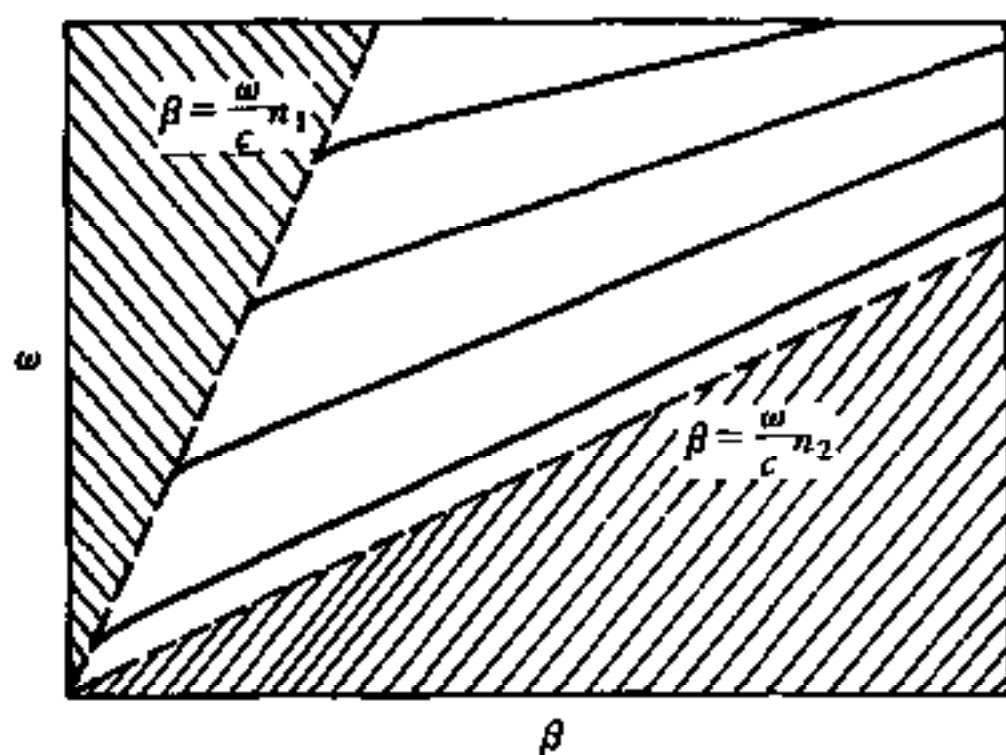


图 3.10 单沟道波导的模式色散曲线($N=1$)

(2) 非对称型 非对称型多沟道波导的折射率分布为

$$n(x) = \begin{cases} n_0 & x < 0 \\ n_2 & m\Lambda \leq x < m\Lambda + b \quad (m = 0, 1, 2, \dots, N-1) \\ n_1 & \text{其他} \end{cases} \quad (3.84)$$

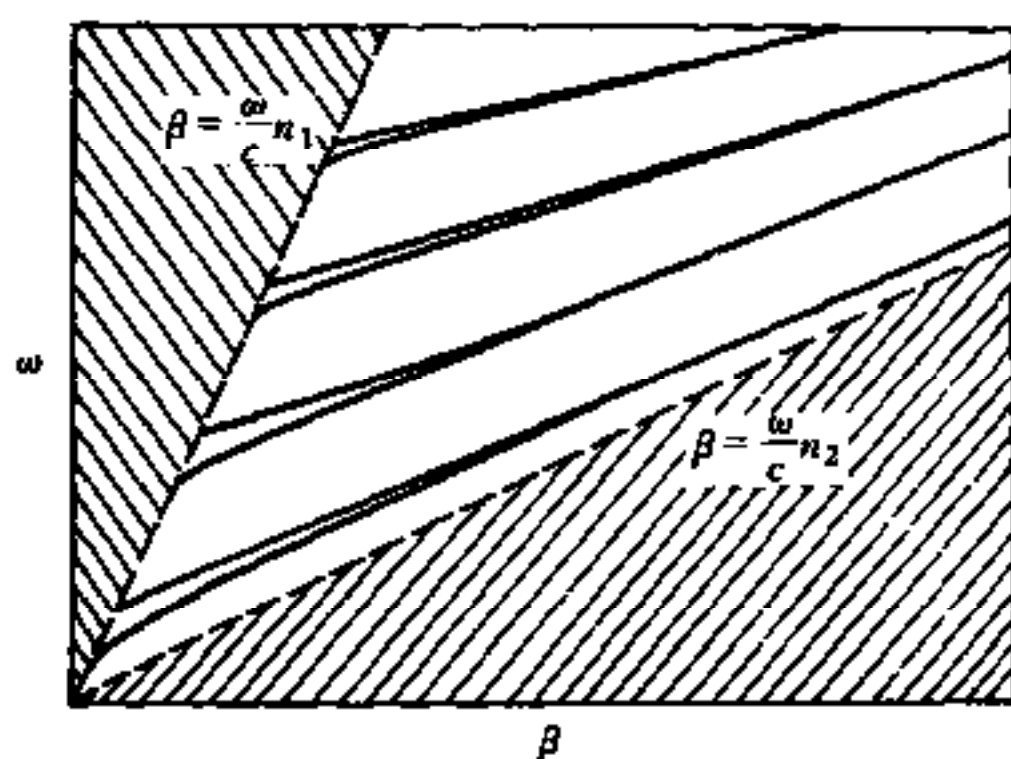


图 3.11 双沟道波导的模式色散曲线($N=2$)

非对称型多沟道波导矩阵形式的色散方程为

$$[-\alpha_0 \quad 1] M^N(\Lambda) \begin{bmatrix} 1 \\ -\alpha_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.85)$$

式中

$$\alpha_0 = (\beta^2 - k_0^2 n_0^2)^{1/2} \quad (3.86)$$

利用切比多夫多项式, 式(3.85)仍可写成(3.81)的形式, 这时系数 A 由下式表示:

$$A = e^{\alpha_1 a} \left[\cos(\kappa_2 b) - \frac{\kappa_2 - \alpha_0 \alpha_1 / \kappa_2}{\alpha_0 + \alpha_1} \sin(\kappa_2 b) \right] \quad (3.87)$$

若式中 $\alpha_0 = \alpha_1$, 即为对称型波导, 于是式(3.87)退化为(3.82)的形式。

对两种典型的多沟道波导结构($N=2$ 和 $N=5$), 模式本征值 β 作为相邻两沟道之间隔离系数 a 的函数曲线由图 3.12 和图 3.13 表示。图中虚线表示无限周期性结构允带的边缘, 阴影区表示允带。对于小的隔离系数 a , 所有的 N 个模式本征值 β 都在允带中。对于无限大的隔离系数, 存在 $N-1$ 度简并的模式本征值 β 和一个对应电磁表面模的非简并态, 表面模的特征是能量局限于表面附近。非简并态和允带边缘的交点发生在临界隔离系数 a_c 处。只有当隔离系数大于 a_c 时, 才有表面模存在。

一旦求得模式本征值 β , 利用转移矩阵可求得模式的场分布函数。

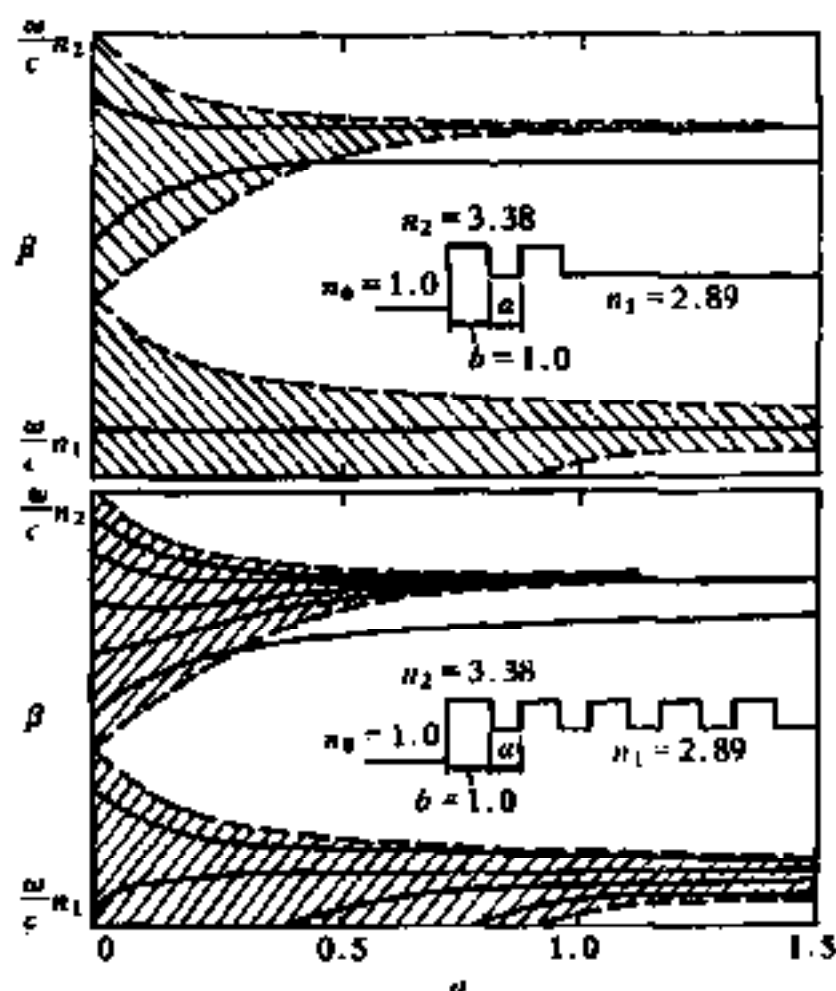


图 3.12 两种多沟道波导的模式本征值 β 与隔离系数 a 的函数曲线

$$b(\omega/c) = 3\pi/4$$

式(3.63)中每一薄层的场振幅都可由矩阵方程式(2.53)确定。图3.14画出了对称型双沟道波导当 $n_1 = 2.89$, $n_2 = 3.38$, $a = b = 0.5\lambda$ 时, 两个最低阶模的场分布, 而图 3.15 画出了对称型五沟道波导当 $n_1 = 2.89$, $n_2 = 3.38$, $a = b = 0.5\lambda$ 时, 五个低阶模的场分布。

非对称型双沟道($N=2$)波导和五沟道($N=5$)波导的场分布函数(当 $n_1 = 2.89$, $n_2 = 3.38$, $n_0 = 1.0$, $a = b = 0.5\lambda$ 时)分别由图 3.16 和图 3.17 表示。图中只画出了第一允带中($n=0$)传播模式的场分布(见图3.13), 这些模对应于非耦合单沟道波导中的最低阶模。这里仍然使用 TE_{mn} 和 TM_{mn} 表示横电偏振模和横磁偏振模, 下标 n 表示带指数($n=0, 1, 2, \dots$), 而 m 表示模指数($m=0, 1, 2, \dots$)。注意这里的模指数与第 1 章中的模指数的意义是不同的。首先, 它必须限定于某一允带中; 其次, 多沟道波导每一允带中的模式数量与沟道数严格一致。在图 3.17 中, TE_{40} 模的场分布函数比较特殊, 它的能量局限于表面 $x=0$ 处。实际上, 这个模的传播常数 β 已处于禁带之中(见图 3.13), 这种特殊的模式称为电磁表面模。

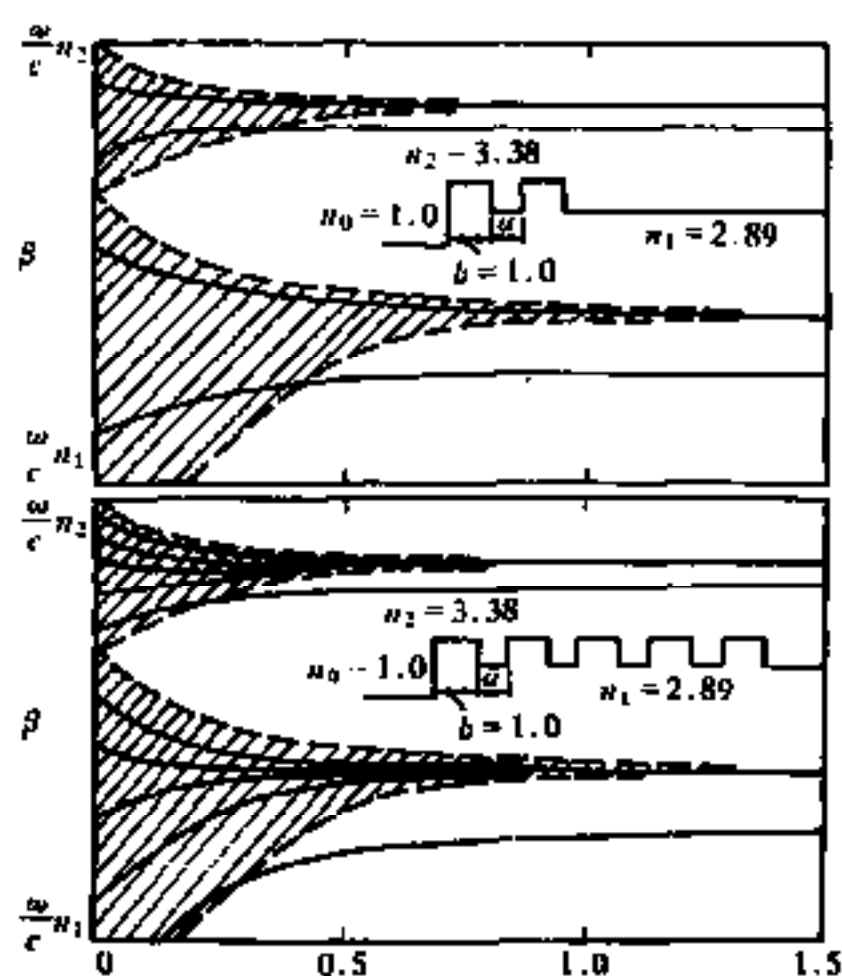


图 3.13 两种多沟道波导的模式本征值 β 与隔离系数 a 的函数曲线

$$b(\omega/c) = \pi$$

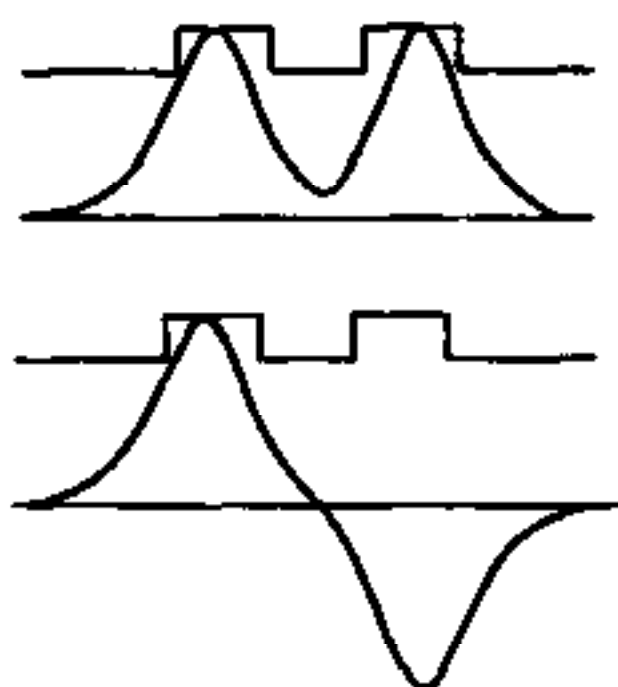


图 3.14 对称型双沟道波导两个最低阶 TE 模的场分布

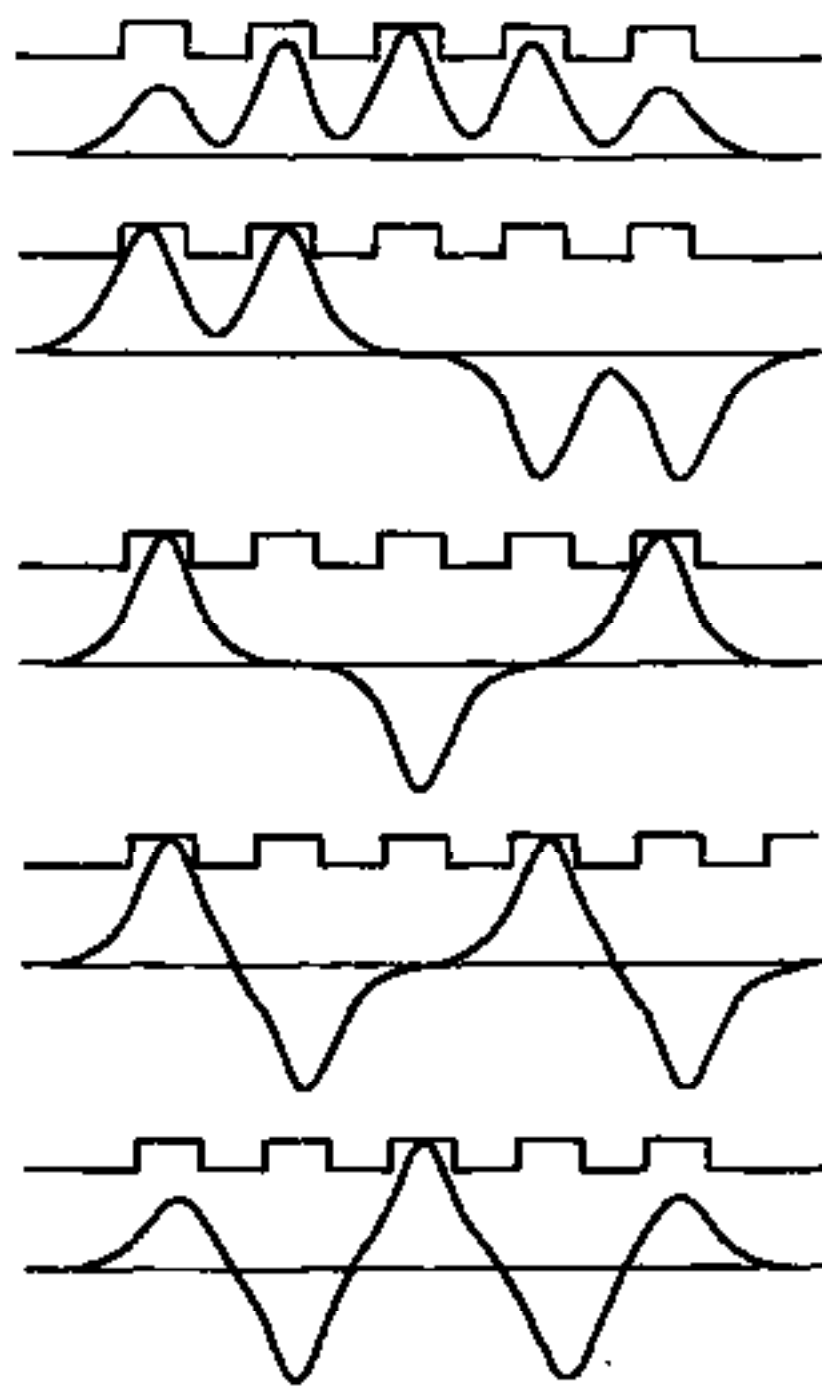


图 3.15 对称型五沟道波导五个最低阶 TE 模的场分布

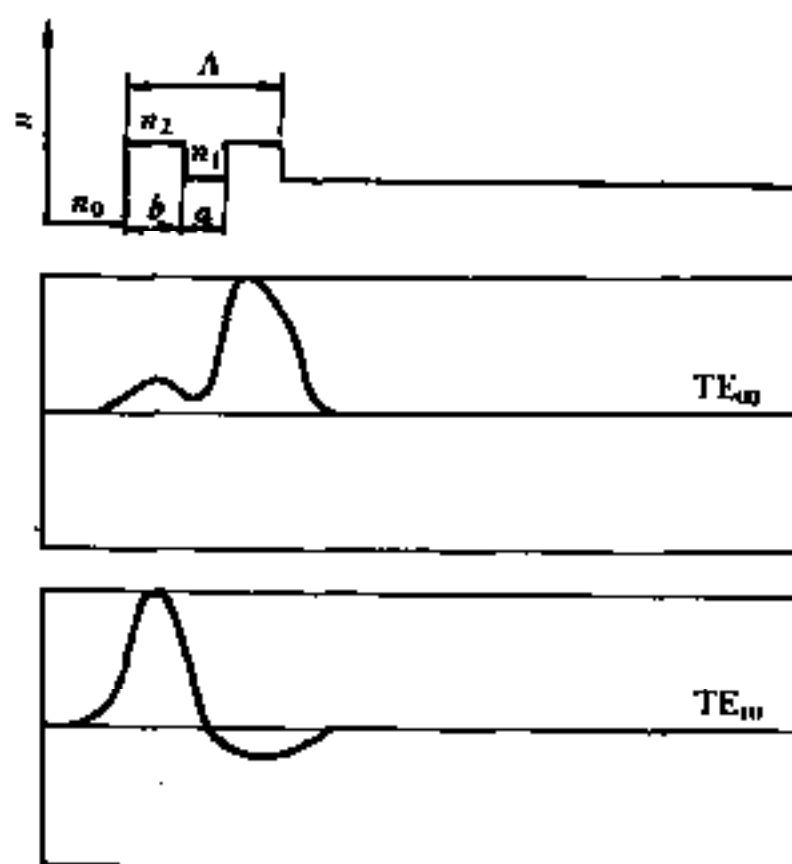


图 3.16 非对称双沟道波导第一允带传播模式的场分布

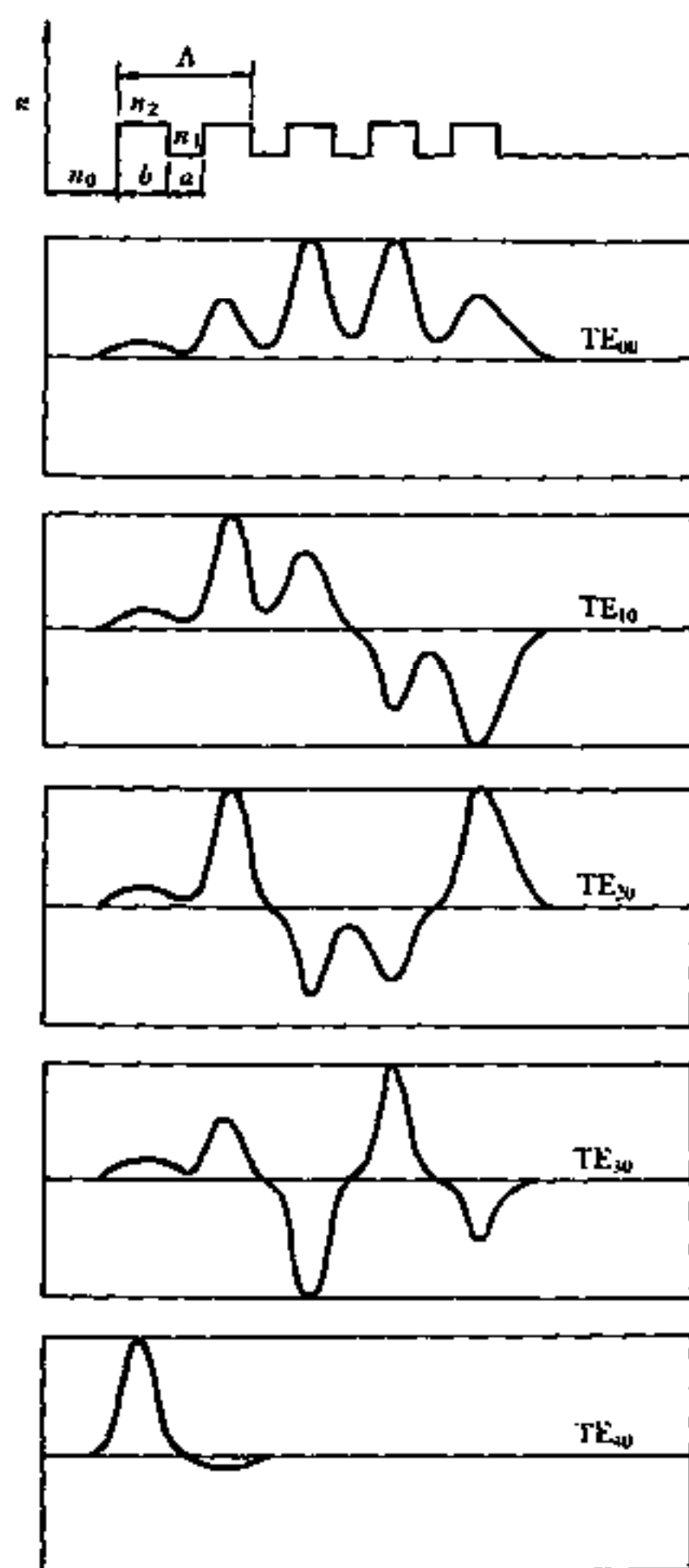


图 3.17 非对称五沟道波导第一允带传播模式的场分布

参考文献

- [3.1] M. J. Sum, M. W. Muller. Appl. Opt., 1977, 16(4):814~815.
- [3.2] G. B. Thompson, G. D. Henshall, J. E. A. whiteaway, et al. J. Appl. Phys.,

1976, 47(4):150~154.

[3.3] Y. Ohtaka. Trans. Inst. Electron. Commun. Eng. Japan, 1974, 57 - c:187.

[3.4] P. Yeh, A. Yariv. Opt. Commun., 1976, 19(6): 427~429.

[3.5] P. Yeh, A. Yariv, C. S. Hong, J. Opt. Soc. Amer., 1977, 67(4): 423~437.

[3.6] E. Kapon, J. Katz, A. Yariv. Opt. letters, 1984, 10(4):125~127.

第4章 渐变折射率波导

4.1 引言

前面几章讨论了电磁波在介质平板波导中的传播特性,这种平板波导是由一个高折射率的平板夹在两个或多个低折射率的平板之间组成的。从光线光学的观点看,在这种波导中,光束在分界面上反复地作内部全反射而传播。随着分界面不规则程度的增加,光线在界面上的每次反射都将引起散射,从而使波导的传输损耗急剧增加,这是阶梯状折射率分布波导的缺陷所在,它严格地限制了低损耗波导的制作容差。为了改善波导的传输损耗,一个自然的想法是使这种阶梯状折射率分布波导改变为渐变折射率波导,在这种渐变折射率波导中,传播的光线不再是锯齿形的,而将变为连续的“弧形光线”,从而避免了因界面不规则引起的散射损耗。因此,这种波导引起了研究人员极大的兴趣。现在,已经有多种成熟的工艺过程,特别是扩散、离子交换和离子注入技术,可使介质波导具有渐变折射率分布,这种渐变折射率波导也叫做非均匀波导。利用光的电磁理论严格分析渐变折射率波导是非常困难的,到目前为止,除有限的几种折射率分布,包括线性分布、平方律分布、指数分布和爱波斯坦型分布,具有严格的精确解之外,绝大多数非均匀波导只能用近似法和数值法求解。数值法可得到精度极高的结果,但由于无法导出解析公式,故看不清问题的物理意义。近似方法中,光线近似和 WKB 近似具有物理图像清晰、分析简单的特点,因而获得了广泛的应用。但它们只适用于变化缓慢的折射率分布和波导中远离截止的模式。对不符合上述条件的折射率分布和波导模式,其结果的精确度将无法接受。到目前为止,虽已发展了多种改进技术,但这些方法多数仍囿于 WKB 近似的框架之中,无法克服 WKB 近似的缺点,难以得到突破性的进展。我们从分析多层平板波导着手,利用转移矩阵这一有效的数学工具,详细研究了光线近似和 WKB 近似的实质,

提出了改进的途径,得到了以下几个实质性的结论:

① 转折点处的相移严格等于 π , 而不是通常选择的 $\pi/2$ 或其他数值。

② 导出了明确的散射子波位相贡献的表达式。

③ 给出了物理意义清晰、而且能得到精确数值结果的色散方程。

本章首先介绍光线方法和 WKB 近似法,在此基础上,用转移矩阵技术分析渐变折射率波导的传播特性。

4.2 光线近似方法^{[4.1],[4.2]}

光线近似方法能简单而直观地分析非均匀波导的传播特性,可得到与 WKB 方法完全一致的模式本征方程。

考虑图 4.1 所示的非均匀平板波导,它的折射率分布由下式给出:

$$n^2(x) = \begin{cases} n_2^2 + (n_1^2 - n_2^2)f(x/d) & (x > 0) \\ n_0^2 & (x < 0) \end{cases} \quad (4.1)$$

式中, n_0 和 n_2 分别为波导覆盖层和衬底的折射率; n_1 为波导表面的折射率, $f(x/d)$ 为折射率变化函数,它的取值范围为 $0 \sim 1$, d 为扩散深度。如图 4.1(a)所示, $n(x)$ 在 $x=0$ 处取最大值 n_1 ,而在 $x>0$ 的区域从 n_1 逐渐递减,直到等于衬底折射率 n_2 。在这种非对称渐变折射率波导中,如图 4.1(b)所示,光线在 $x=0$ 界面上发生全内反射,而在转折 x_t 点处发生弯曲,光线按弧形光路沿 z 方向传播。

若把弧形光线分成若干个线段,与各个线段对应的横向坐标和间隔分别记作 x_i 和 Δx_i ,当 Δx_i 很小时,其范围内的介质折射率可近似为 $n(x_i)$ 。于是,光线上任意一点的波矢量可表示为:

$$|k(x)| = k_0 n(x_i) \quad (4.2)$$

$$k_x = \kappa = k_0 n(x_i) \cos \theta_i \quad (4.3)$$

$$k_z = \beta = k_0 n(x_i) \sin \theta_i \quad (4.4)$$

式中, θ_i 是第 i 个小区域的波矢量与 x 轴的夹角, κ 和 β 分别是波矢量 k 的 x 分量和 z 分量,如图 4.1(c)所示。传播常数 β 是与 x 无关的常

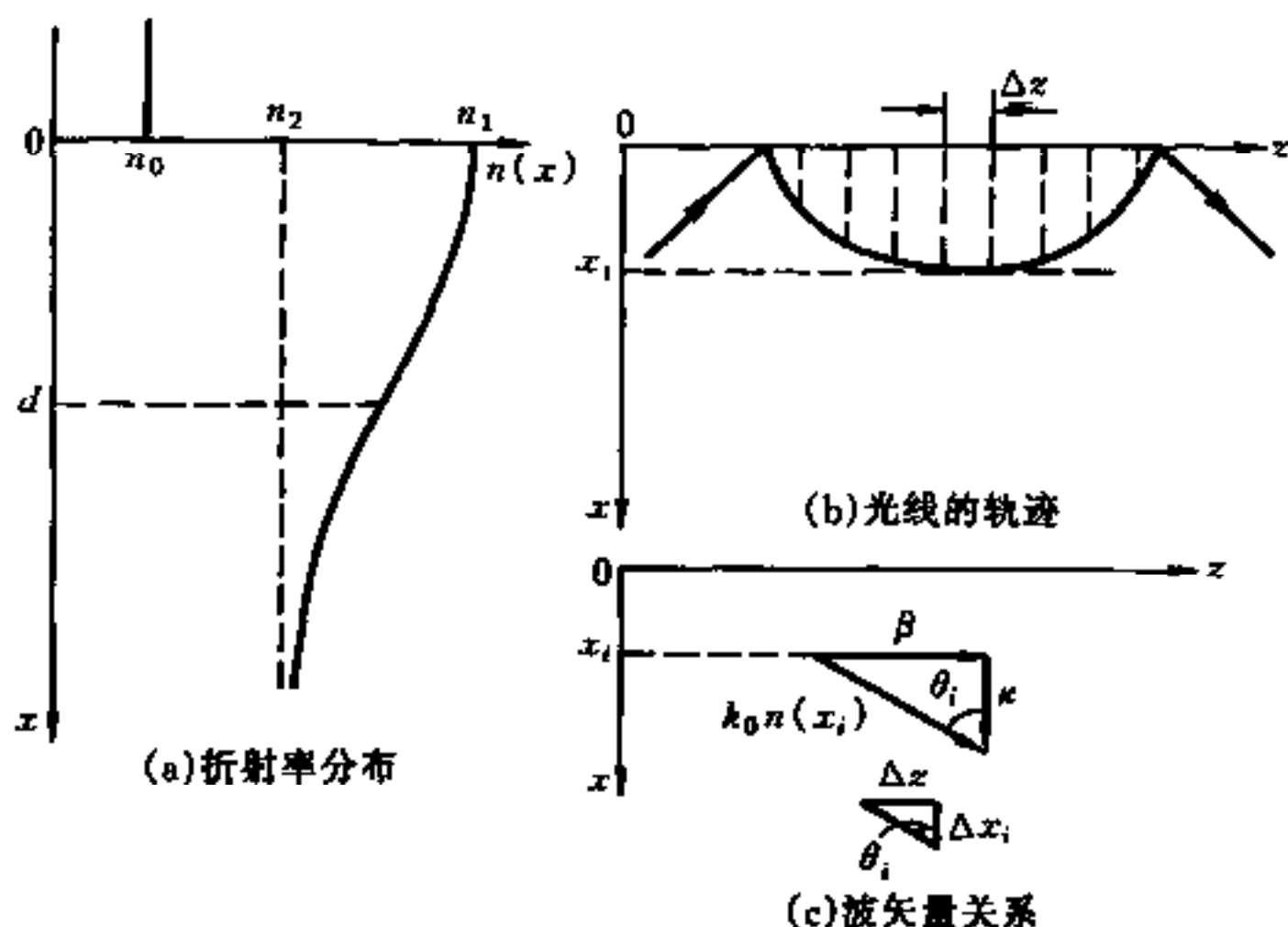


图 4.1 光线近似分析图

数。另外,由于波矢量 k 在转折点处没有 x 分量,所以有

$$\beta = k_0 n(x_t) \quad (4.5)$$

有效折射率

$$N = \beta/k_0 = n(x_t) \quad (4.6)$$

为了建立渐变折射率波导的模式本征方程,采用类似于阶梯形折射率平板波导的方法。观察光波的横向运动所经历的位相变化,光线横越间隔 Δx_i 所经历的相移

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_i &= k_0 n(x_i) \cos\theta_i \cdot \Delta x_i = \\ &= k_0 [n^2(x_i) - N^2]^{1/2} \cdot \Delta x_i \end{aligned} \quad (4.7)$$

欲求光线从波导表面行进到转折点 x_t 处的相移,可令 $\Delta x_i \rightarrow 0$,并对式(4.7)求和,于是有:

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta\Phi_i = k_0 \int_0^{x_t} [n^2(x) - N^2]^{1/2} dx \quad (4.8)$$

此外,还应考虑在界面 $x=0$ 处的全反射相移 $-2\phi_{13}$ 和转折点处的弯曲相移 $-2\phi_{12}$ 。容易知道,半全反射相移

$$\phi_{13} = \arctan\left(\frac{p_0}{\kappa_1}\right) \quad (4.9)$$

式中, $p_0 = (\beta^2 - k_0^2 n_0^2)^{1/2}$; $\kappa_1 = (k_0^2 n_1^2 - \beta^2)^{1/2}$ 。

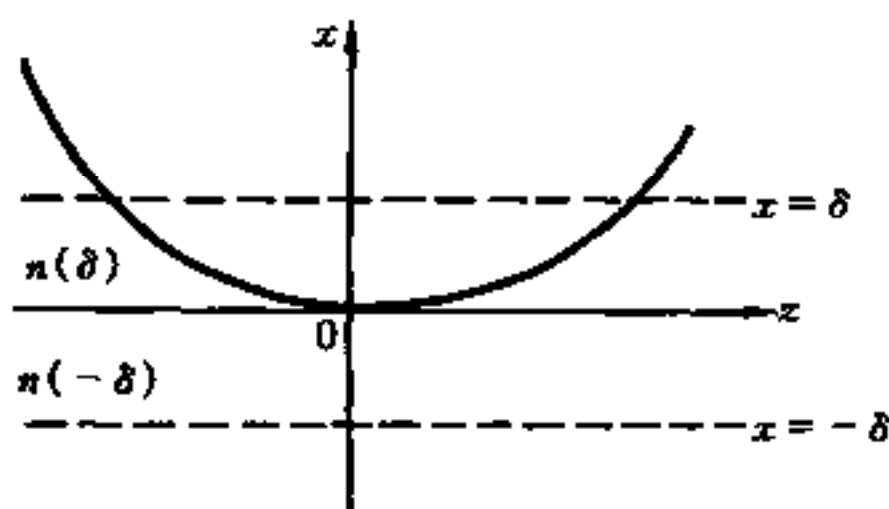


图 4.2 光线在非均匀介质中的弯曲

为了分析弯曲相移,把坐标原点选在光线的转折点处(如图 4.2 所示),并且画出 $x = \delta$ 和 $x = -\delta$ 两直线。当 δ 很小时, $\delta > x > 0$ 和 $0 > x > -\delta$ 区域可近似看成是折射率分别为 $n(\delta)$ 和 $n(-\delta)$ 两个均匀介质区域,从而可把弯曲的光线看作是在 $x = 0$ 界面上发生全反射的光线。对于 TE 波,半全反射相移

$$\phi_{12}^{\text{TE}} = \arctan \sqrt{\frac{\beta^2 - k_0^2 n^2(-\delta)}{k_0^2 n^2(\delta) - \beta^2}} \quad (4.10)$$

式中, $n(\delta)$ 和 $n(-\delta)$ 分别近似为

$$n(\delta) = n(0) + \delta \frac{dn(0)}{dx} \quad (4.11)$$

$$n(-\delta) = n(0) - \delta \frac{dn(0)}{dx} \quad (4.12)$$

由于转折点为 $x \approx 0$, 于是得到

$$\beta = k_0 n(0) \quad (4.13)$$

将式(4.11)、(4.12)和(4.13)代入式(4.10),并取 $\delta \rightarrow 0$,从而可得

$$\phi_{12}^{\text{TE}} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \quad (4.14)$$

同样,对于 TM 波,也有

$$\phi_{12}^{\text{TM}} = \frac{\pi}{4} \quad (4.15)$$

以上证明了光线在非均匀介质中发生弯曲时,转折点处的全反射相移是 $-\pi/2$ 。

由以上分析可知,非对称渐变折射率波导的模式本征方程可写为

$$\int_0^{x_1} \kappa(x) dx = m\pi + \arctan\left(\frac{p_0}{\kappa_1}\right) + \frac{\pi}{4} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.16)$$

式中

$$\kappa(x) = [k_0^2 n^2(x) - \beta^2]^{1/2} \quad (4.17)$$

对图 4.3 所示的有两个转折点的非均匀光波导,模式本征方程为:

$$\int_{x_1}^{x_2} \kappa(x) dx = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.18)$$

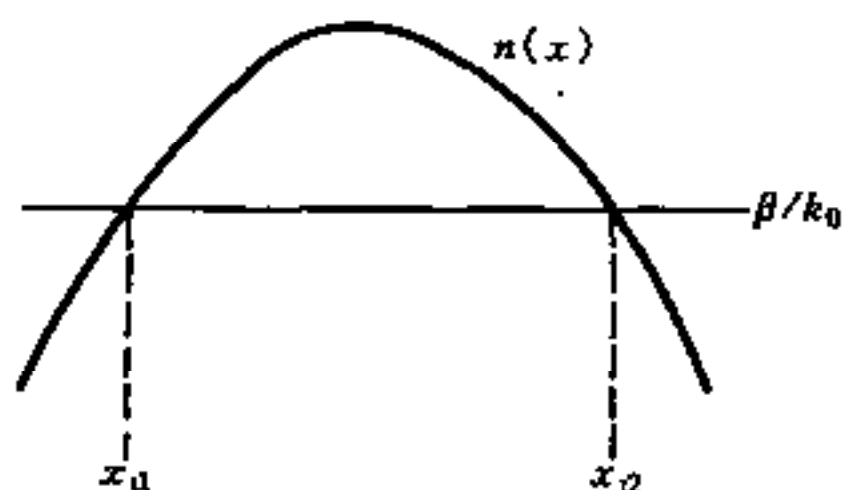


图 4.3 有两个转折点的非均匀光波导

4.3 WKB 近似法^{[4.1]~[4.4]}

WKB 近似是由温采 (Wentzel)、克拉玛 (Kramers) 和布里渊 (Brillouin) 在量子力学中建立的求解一维薛定谔方程的一种方法。这是一种准经典近似,它要求在德布罗意波长范围内,势场 $V(x)$ 的变化足够小。由于薛定谔方程与标量波动方程极为相似:介电常数分布相当于量子力学中的势函数,电磁场分量与波函数相对应。因此,毫无疑问,可把 WKB 方法直接应用到非均匀光波导中。只要把波函数按 \hbar ($\hbar = h/2\pi$, h 是普朗克常数) 的幂级数展开,改为电磁场分量按 $1/k_0$ 的幂级数展开即可。

4.3.1 场的近似表示

考虑标量波动方程

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + [k_0^2 n^2(x) - \beta^2] \Psi = 0 \quad (4.19)$$

式中, Ψ 是 TE 波的任一电磁场分量。设试探解为

$$\Psi = \Psi_0 \exp[ik_0 s(x)] \quad (4.20)$$

把 $s(x)$ 按 $1/k_0$ 的幂级数作渐近展开:

$$s(x) = s_0(x) + \frac{1}{k_0} s_1(x) + \dots \quad (4.21)$$

代入试探解, 可得

$$\Psi = \Psi_0 \exp[ik_0 s_0(x) + i s_1(x) + \dots] \quad (4.22)$$

只要在光波长数量级范围内, $n(x)$ 的变化足够小, 则可忽略上式中的高阶项, 这是 WKB 近似的基本假设。把式(4.22)代入标量波动方程(4.19), 并使具有 $1/k_0$ 同阶幂的项相等, 使得零级和一级 WKB 近似

$$s_0 = \frac{1}{k_0} \int [k_0^2 n^2(x) - \beta^2]^{1/2} dx \quad (4.23)$$

$$s_1 = \frac{i}{2} \ln \left| \frac{ds_0}{dx} \right| \quad (4.24)$$

依据 $[k_0^2 n^2(x) - \beta^2]$ 的符号, 由式(4.22)~(4.24), 可得以下两种类型的解:

$$\Psi(x) = \frac{\Psi_0}{\kappa^{1/2}} \exp[\pm i \int \kappa dx] \quad k_0^2 n^2(x) > \beta^2 \quad (4.25)$$

$$\Psi(x) = \frac{\Psi_0}{p^{1/2}} \exp[\pm \int p dx] \quad k_0^2 n^2(x) < \beta^2 \quad (4.26)$$

式中

$$\kappa^2 = -p^2 = k_0^2 n^2(x) - \beta^2 \quad (4.27)$$

满足导波物理性质的解由式(4.25)和(4.26)的适当组合给出。由第 1 章介绍的内容可知, 在 $k_0^2 n^2(x) > \beta^2$ 区域, 导波场具有振荡行为, 而在 $k_0^2 n^2(x) < \beta^2$ 区域, 导波场是衰减的。转折点由条件

$$k_0 n(x) = \beta \quad (4.28)$$

确定。

由式(4.25)和(4.26)可知,在转折点处,场是发散的,说明 WKB 近似的解不再适用。为了在转折点处连接振荡区和衰减区的场,必须在转折点附近严格求解标量波动方程,并求出严格解在离开转折点较远处的渐近行为,然后与 WKB 近似解比较,就可以找出 WKB 近似解的连接公式。

4.3.2 转折点附近的近似解

设转折点的位置处于 $x = x_t$, 因此有 $k_0 n(x_t) = \beta$ 。在转折点附近作线性近似

$$\kappa^2 = c(x_t - x) \quad (4.29)$$

式中 c 为常数。

作变量代换

$$x' = c^{1/3}(x - x_t) \quad (4.30)$$

这时,标量波动方程(4.19)变为

$$\frac{d^2 \Psi}{dx'^2} - x' \Psi = 0 \quad (4.31)$$

上述方程的两个独立解是爱里函数 $Ai(x')$ 和 $Bi(x')$, 这两个函数在转折点 $x' = 0$ 处都是连续的。因此,只要它们的渐近行为与 WKB 近似解相类似,则爱里函数可作为转折点附近的近似场分布。爱里函数的四种渐近形式为:

$$Ai(x') \sim \frac{e^{-\zeta}}{2\pi^{1/2} x'^{1/4}} \quad (4.32)$$

$$Ai(-x') \sim \frac{1}{\pi^{1/2} x'^{1/4}} \sin\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right) \quad (4.33)$$

$$Bi(x') \sim \frac{e^{\zeta}}{\pi^{1/2} x'^{1/4}} \quad (4.34)$$

$$Bi(-x') \sim \frac{1}{\pi^{1/2} x'^{1/4}} \cos\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right) \quad (4.35)$$

式中

$$\zeta = \frac{2}{3} x'^{3/2} \quad (4.36)$$

利用上述方程,可得连接公式,下面分两种情况讨论:

(1) 转折点右边为低折射率区域 如图 4.4 所示,转折点右边是低折射率区域。

当 $x < x_t$ 时,有 $k_0^2 n^2(x) > \beta^2$,
近似解呈振荡形式:

$$\Psi \sim \frac{1}{\kappa^{1/2}} \cos\left(\int_x^{x_t} \kappa dx - \frac{\pi}{4}\right) \quad (4.37)$$

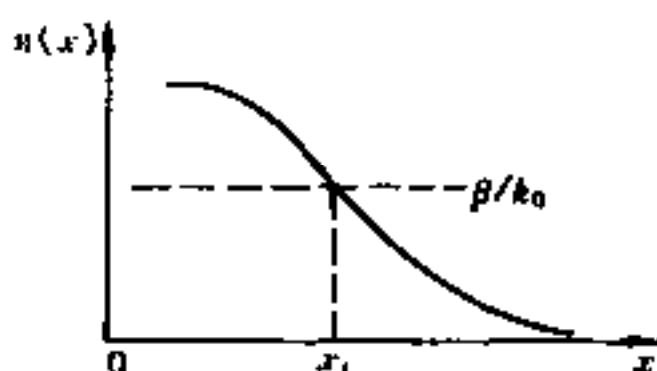


图 4.4 转折点右边是低折射率区域

当 $x > x_t$ 时,有 $k_0^2 n^2(x) < \beta^2$,
近似解为指数形式:

$$\Psi \sim \frac{1}{2p^{1/2}} \exp\left(-\int_{x_t}^x p dx\right) \quad (4.38)$$

连接公式为

$$\frac{1}{2p^{1/2}} \exp\left(-\int_{x_t}^x p dx\right) \Leftrightarrow \frac{1}{\kappa^{1/2}} \cos\left(\int_x^{x_t} \kappa dx - \frac{\pi}{4}\right) \quad (4.39)$$

当 $x = x_t$ 右边是指数上升的解时,连接公式变为

$$\frac{1}{p^{1/2}} \exp\left(\int_{x_t}^x p dx\right) \Leftrightarrow \frac{1}{\kappa^{1/2}} \cos\left(\int_x^{x_t} \kappa dx + \frac{\pi}{4}\right) \quad (4.40)$$

以上情况通常发生在衰减区为有限区域时,这时,合理的解应是指数衰减与指数上升解的叠加。

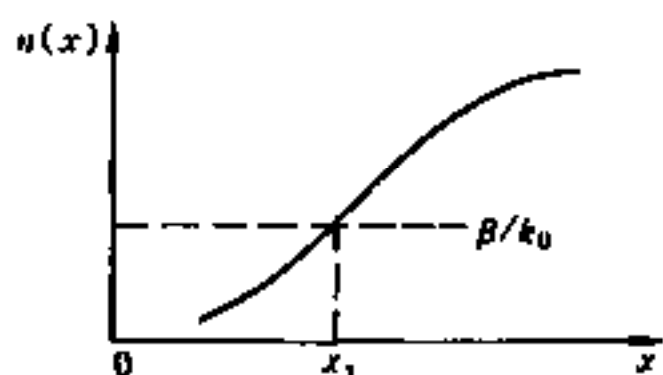


图 4.5 转折点左边是低折射率区域

(2) 转折点左边为低折射率区域
如图 4.5 所示,转折点左边是低折射率区域。

按照 x_t 左边近似解是指数衰减或指数上升的两种不同情况,可得以下连

接公式:

$$\frac{1}{2p^{1/2}}\exp\left(-\int_x^{x_1} p dx\right) \Leftrightarrow \frac{1}{\kappa^{1/2}}\cos\left(\int_{x_1}^x \kappa dx - \frac{\pi}{4}\right) \quad (4.41)$$

$$\frac{1}{p^{1/2}}\exp\left(\int_x^{x_1} p dx\right) \Leftrightarrow \frac{1}{\kappa^{1/2}}\cos\left(\int_{x_1}^x \kappa dx + \frac{\pi}{4}\right) \quad (4.42)$$

4.3.3 存在两个转折点时的解

对于存在两个转折点的情况,非均匀光波导中导模的行为如图4.6所示。 x_1 和 x_2 是两个转折点,容易看清在区域 $x_1 < x < x_2$ 中,有 $k_0^2 n^2(x) > \beta^2$,因此场呈振荡形式,而在其他区域($x < x_1$ 和 $x > x_2$),场是衰减的。

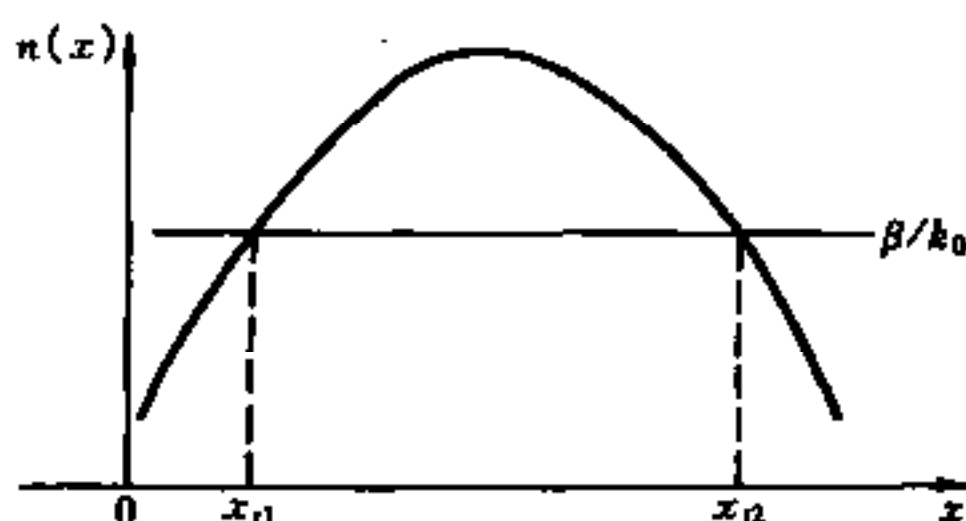


图 4.6 存在两个转折点的非均匀光波导

在转折点 $x = x_1$ 处,为了与 $x \rightarrow -\infty$ 时的衰减解匹配,连接公式(4.41)要求 $x > x_1$ 处的解应呈振荡形式,即:

$$\Psi \sim \frac{1}{\kappa^{1/2}}\cos\left(\int_{x_1}^x \kappa dx - \frac{\pi}{4}\right) \quad (4.43)$$

在另一转折点 $x = x_2$ 处,为了与 $x \rightarrow \infty$ 时的衰减解匹配,连接公式(4.39)要求 $x < x_2$ 处的解为

$$\begin{aligned} \Psi &\sim \frac{1}{\kappa^{1/2}}\cos\left(\int_x^{x_2} \kappa dx - \frac{\pi}{4}\right) = \\ &\frac{1}{\kappa^{1/2}}\cos\left(\int_{x_1}^x \kappa dx - \int_{x_1}^{x_2} \kappa dx + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \quad (4.44)$$

为了使同一区域内由式(4.43)和(4.44)给出的两种形式的振荡解

能平滑地匹配, 必须要求余弦函数的宗量相等或差 $m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), 即要求

$$\int_{x_1}^{x_2} \kappa dx = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.45)$$

方程(4.45)即为渐变折射率波导的模式本征方程, 或称色散方程。利用该式可求出渐变折射率波导的 m 个导模的传播常数 β_m 。可以看出式(4.45)与(4.18)完全一致, 说明光线近似与 WKB 近似的一致性。但 WKB 近似比光线近似的优越之处在于: 不需要经过复杂的数值计算就能得到较为精确的场分布, 而光线近似仅给出本征值而已。此外, 需要指出, 仅当两转折点离开足够远时, 方程(4.45)才成立。在两转折点靠得很近时, 线性近似式(4.29)是不成立的, 应用方程(4.45)将产生极大的误差。

4.3.4 存在突变折射率时的解

考虑在转折点 x_2 处存在折射率突变的情况, 而在转折点 x_1 处, 折射率变化是平滑的。如图 4.7 所示, 在 $x_1 < x < x_2$ 区域, 有 $k_0^2 n^2(x) > \beta^2$, 可见场呈振荡形式, 可由式(4.43)表示。而在其他区域, 由于 $k_0^2 n^2(x) < \beta^2$, 故场是衰减的。毫无疑问, 在 $x = x_1$ 处, 可直接应用连接公式。但在 $x = x_2$ 处, 应用连接公式是不合适的, 因为在该点线性假设不成立。为此, 必须利用电磁场边界条件。由图 4.7 可见, 假设由左右两边分别趋向 x_2 的折射率为 $n(x_2^-)$ 和 $n(x_2^+)$, 则在

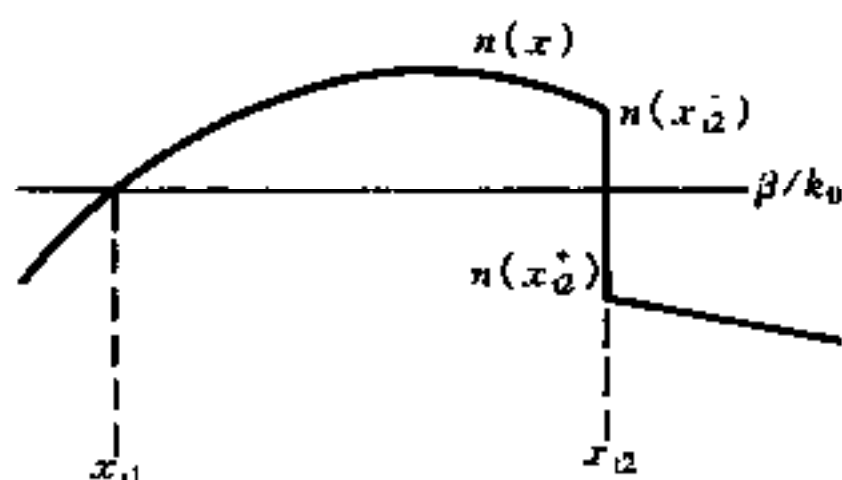


图 4.7 在转折点 x_2 处存在折射率突变的情况

该区域中的场为

$$\Psi \sim \frac{1}{p^{1/2}} \exp\left(-\int_{x_2}^x p dx\right) \quad (4.46)$$

接下来的工作是使转折点两边的场以及它们的一阶导数在 $x = x_2$ 处连续。考察式(4.43)和(4.46)可知,每个区域的场的一阶导数都由两项组成,其中一项包含系数的导数,而另一项包含三角函数或指数函数宗量的导数。实际上,由 WKB 近似的原则,场函数中仅包含了展开式(4.21)中的一阶项,而对 $s_1(x)$ 的导数仅对高阶项产生影响,故可不予考虑。由此可得

场的导数的连续性条件为

$$\kappa^{1/2}(x_2^-) \sin\left(\int_{x_1}^{x_2^-} \kappa dx - \frac{\pi}{4}\right) = p^{1/2}(x_2^+) \quad (4.47)$$

场的连续性条件为

$$\frac{1}{\kappa^{1/2}(x_2^-)} \cos\left(\int_{x_1}^{x_2^-} \kappa dx - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{p^{1/2}(x_2^+)} \quad (4.48)$$

联合式(4.47)和(4.48),可得在转折点处存在折射率突变情况的模式本征方程为

$$\int_{x_1}^{x_2} \kappa dx = m\pi + \frac{\pi}{4} + \arctan \sqrt{\frac{\beta^2 - k_0^2 n^2(x_2^+)}{k_0^2 n^2(x_2^-) - \beta^2}} \quad (4.49)$$

($m = 0, 1, 2, \dots$)

显然,方程(4.49)也可由光线近似方法导出。

4.3.5 突变折射率附近的“埋入”模^[4.5]

考虑图 4.8 所示的在转折点 x_2 附近存在折射率突变的情况。设突变点处于 $x = a$ 。显然,在 $x_1 < x < x_2$ 区域,场呈振荡行为,而在 $x < x_1$ 和 $x > a$ 区域,场是衰减的。在区域 $x_2 < x < a$,应是指数衰减场和指数上升场的叠加。根据连接公式(4.39)和(4.40),三个区域的场分布可由下式给出

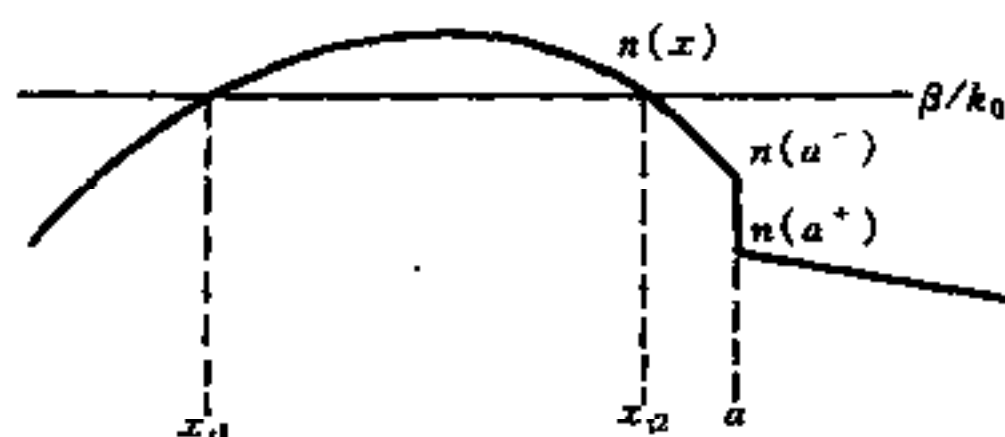


图 4.8 在转折点 x_2 附近存在折射率突变的情况

$$\Psi \sim \begin{cases} \frac{1}{\kappa^{1/2}} \cos\left(\int_{x_1}^x \kappa dx - \frac{\pi}{4}\right) & x_1 < x < x_2 \\ \frac{1}{p^{1/2}} \left[\cos\left(\int_{x_1}^{x_2} \kappa dx\right) \exp\left(\int_{x_2}^x p dx\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\int_{x_1}^{x_2} \kappa dx\right) \exp\left(-\int_{x_2}^x p dx\right) \right] & x_2 < x < a \\ \frac{1}{p^{1/2}} \exp\left(-\int_a^x p dx\right) & x > a \end{cases} \quad (4.50)$$

若用 $n(a^-)$ 和 $n(a^+)$ 分别表示左右两边趋近 $x=a$ 点的折射率, 则由场在 $x=a$ 处的连续性条件可得

$$\cos\left(\int_{x_1}^{x_2} \kappa dx\right) \exp\left(\int_{x_2}^{a^-} p dx\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\int_{x_1}^{x_2} \kappa dx\right) \exp\left(-\int_{x_2}^{a^-} p dx\right) = \left[\frac{p(a^-)}{p(a^+)}\right]^{1/2} \quad (4.51)$$

同样, 注意到 4.3.4 节中关于场的一阶导数的叙述, 可得场的一阶导数在 $x=a$ 处的连续性条件为

$$\cos\left(\int_{x_1}^{x_2} \kappa dx\right) \exp\left(\int_{x_2}^{a^-} p dx\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\int_{x_1}^{x_2} \kappa dx\right) \exp\left(-\int_{x_2}^{a^-} p dx\right) = -\left[\frac{p(a^+)}{p(a^-)}\right]^{1/2} \quad (4.52)$$

联合式(4.51)和(4.52), 可得此类“埋入”模的模式本征方程为

$$\int_{x_1}^{x_2} \kappa dx = m\pi + \arctan \left\{ 2 \left[\frac{p(a^-) + p(a^+)}{p(a^-) - p(a^+)} \right] \exp\left(2 \int_{x_2}^{a^-} p dx\right) \right\}$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.53)$$

在突变趋于零的极限下, 即当 $n(a^-) \rightarrow n(a^+)$ 时, 方程(4.53)还原为折射率连续变化的模式本征方程(4.45)。

4.4 WKB 方法的近似实质

上节介绍了 WKB 方法在渐变折射率光波导中的应用, 从各类光波导的相位积分形式的模式本征方程可见, WKB 方法具有形式简单、物理意义明确的特点, 因而不仅在量子力学中, 而且在物理学的其他分支中都获得了广泛的应用。但 WKB 方法存在严重的缺陷, 它不适用于快速变化的折射率分布, 在转折点附近的解误差较大。所以, 伴随着 WKB 方法的建立, 它的精确度问题也随之产生。到目前为止, 已建立了多种改进的 WKB 方法: 如从计入被 WKB 方法忽略的高阶项出发, 求解标量波动方程; 或从改进转折点处的相移出发, 认为相移可以从短波近似下的 $\pi/2$ 到长波近似下的 π 之间变化。此外, 在探索近似方法的同时, 还建立了一系列的数值计算方法。例如, 有限元技术、数值矩阵计算、级数方法等。数值方法可给出所要求的精确度, 但难以了解所研究问题的物理意义。无论是近似方法, 还是数值技术, 目前仍无法解释以下几个重要问题:

① WKB 方法中场函数按 $1/k_0$ 的幂级数展开, 高阶项的忽略在物理上的意义是什么?

② 转折点处的相移究竟是什么?

③ 为什么 WKB 方法对某些特殊的折射率分布(例如平方律分布), 可给出精确的模式本征值?

为揭示 WKB 方法的近似实质, 考虑图 4.9 中点划线所示的渐变折射率光波导, 图中 n_0 和 n_2 分别是覆盖层和衬底的折射率, n_1 是波导表面 $x=0$ 处的折射率, 设 x_t 是转折点, 则由上节的分析可知, 在 $0 < x < x_t$ 区域, 有 $k_0^2 n^2(x) > \beta^2$, 场呈振荡形式; 而在其他区域, 有 $\beta^2 > k_0^2 n^2(x)$, 场是衰减的。根据光线近似方法或 WKB 方法, 可得该渐变折射率光波导的模式本征方程:

$$\int_0^{x_1} \kappa dx = m\pi + \arctan\left(\frac{p_0}{\kappa_1}\right) + \frac{\pi}{4} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.54)$$

式中:

$$\begin{aligned} \kappa &= [k_0^2 n^2(x) - \beta^2]^{1/2} \\ \kappa_1 &= (k_0^2 n_1^2 - \beta^2)^{1/2} \\ p_0 &= (\beta^2 - k_0^2 n_0^2)^{1/2} \end{aligned}$$

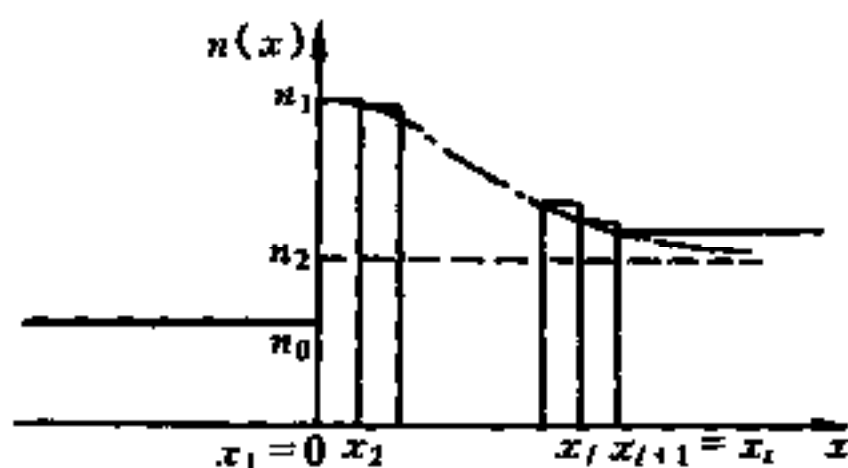


图 4.9 渐变折射率光波导

构造一新的如图 4.9 中实线所示的 $(l+2)$ 层光波导。即把渐变波导的原振荡区分割成 l 层, 设第 i 层的厚度为 $x_{i+1} - x_i = h_i$ ($i = 1, 2, \dots, l$), 且有 $x_1 = 0$ 和 $x_{l+1} = x_t$ 。则第 i 层的折射率为 $n(x_i)$ 。根据第 3 章的分析可知, 若有 $k_0^2 n^2(x_l) > \beta^2$ 时, 该 $(l+2)$ 层光波导的模式本征方程由式 (3.29) 和 (3.30) 表示。当分割的层数趋向无穷大时, 即 $l \rightarrow \infty, h_i \rightarrow 0$ 时, $n(x_l) \rightarrow n(x_t)$, 从而转折点处的半相移为:

$$\arctan\left(\frac{p_{l+1}}{\kappa_l}\right) = \arctan\sqrt{\frac{\beta^2 - k_0^2 n^2(x_{l+1})}{k_0^2 n^2(x_l) - \beta^2}} \rightarrow \frac{\pi}{4} \quad (4.55)$$

于是方程 (3.29) 可改写成下述形式:

$$\int_0^{x_1} \kappa dx + \Phi(s) = m\pi + \arctan\left(\frac{p_0}{\kappa_1}\right) + \frac{\pi}{4} \quad (4.56)$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots)$$

若忽略散射子波的位相贡献 $\Phi(s)$, 则方程 (4.56) 退化为 WKB 方法的模式本征方程 (4.54)。

由以上分析可知, WKB 方法的近似实质是:

① 用转折点处的折射率 $n(x_t)$ 代替转折点外的折射率, 从而得到转折点处的相移为 $\pi/2$ 的结论。

② 忽略了散射子波的相位贡献。

由于转折点附近的解对转折点外的折射率分布比远离转折点的解具有更紧密的关系, 而 WKB 方法不适当地以 $n(x_t)$ 取代转折点外的实际折射率分布, 说明了 WKB 方法只适用于远离转折点处解的原因。另外, 由散射子波相位贡献的表达式(3.30)可见, 折射率变化越剧烈, 则 $\Phi(s)$ 亦越大; 而折射率变化越慢, 则 $\Phi(s)$ 越小。从而解释了 WKB 方法仅适用于变化缓慢的折射率分布的原因。

4.5 等效衰减系数方法

根据上节的分析, 欲改进 WKB 近似的精度, 必须考虑层间反射波的影响和修改转折点处的全反射相移。为此, 设计了以下两种方法对 WKB 近似作出改进。

4.5.1 积分平均法^[4.6]

考虑图 4.10 所示的任意折射率分布的平板波导, 其中 n_0 、 n_2 分别为波导覆盖层和衬底的折射率, n_1 为波导表面折射率, x_t 为转折点处的坐标。为方便计, 把 $(0, x_t)$ 区域划分为 l 等份, 每个小区域的厚度

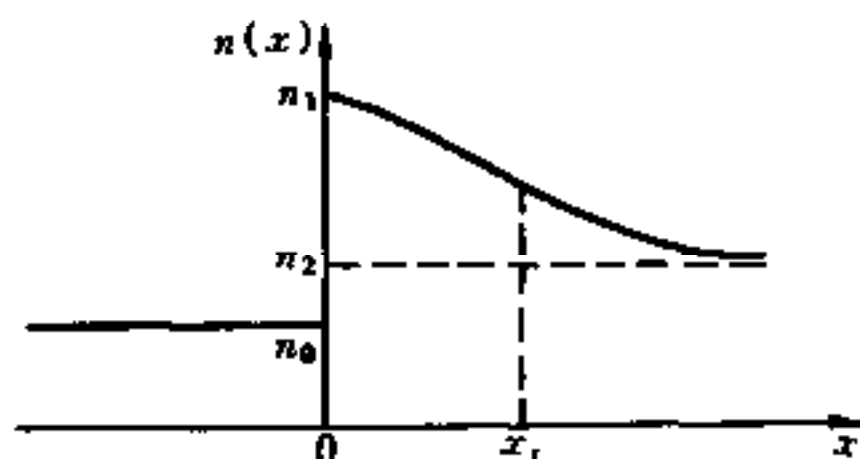


图 4.10 任意折射率分布的平板波导

都为 h , 即 $x_t = lh$ 。设 TE 模在覆盖层和 $x > x_t$ 区域的电场分布为

$$E_y(x) = \begin{cases} A_0 \exp(p_0 x) & (x < 0) \\ A_1 \exp[-p_1(x - x_t)] & (x > x_t) \end{cases} \quad (4.57)$$

式中, $p_0 = (\beta^2 - k_0^2 n_0^2)^{1/2}$; A_0 和 A_1 为待定系数。由于转折点外的场肯定是衰减的, 但以何种形式衰减却是未知的, 它取决于转折点外的折射率分布。若用一指数衰减场来近似转折点外的实际衰减场, 则等效衰减系数 p_1 可用下式定义:

$$p_1 = \frac{1}{1/p_t} \int_{x_t}^{x_t+1/p_t} \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n^2(x)} dx \quad (4.58)$$

由于 p_1 代表转折点外等效指数衰减场的衰减系数, 显然 $1/p_t$ 代表等效指数衰减场的渗透深度; 积分宗量表示转折点外 x 处的衰减系数。容易看出, 式(4.58)是: 在转折点外 $1/p_t$ 长度上衰减系数的平均值。同时认为渗透深度以外的场已足够小, 可忽略不计。简化式(4.58), 可得到确定 p_t 的积分方程:

$$\int_{x_t}^{x_t+1/p_t} \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n^2(x)} dx = 1 \quad (4.59)$$

在 $(0, x_t)$ 区域, 则可利用 3.2.2 节中非对称多层平板波导的结果, 即有:

$$\sum_{i=1}^l \kappa_i h_i + \Phi(s) = m\pi + \arctan\left(\frac{p_0}{\kappa_1}\right) + \arctan\left(\frac{p_t}{\kappa_l}\right) \quad (4.60)$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\Phi(s) = \sum_{i=1}^{l-1} \left[\Phi_{i+1} - \arctan\left(\frac{\kappa_{i+1}}{\kappa_i} \tan \Phi_{i+1}\right) \right] \quad (4.61)$$

而在转折点处有:

$$\beta = k_0 n(x_t) \quad (4.62)$$

式(4.59)~(4.62)四式构成了任意折射率分布平板波导封闭形式的色散方程, 一旦知道了折射率分布 $n(x)$, 则可用以上四式确定非均匀平板波导的传播特性。上述近似称为等效衰减系数的积分平均法, 该方法对 WKB 近似作出了以下两处改进:

① 在转折点内采用了严格推导的公式(4.60)和(4.61), 即考虑了 WKB 近似忽略的层间反射波的影响。

② 用式(4.59)定义了转折点外的等效衰减系数,其实质是用一小于 $n(x_1)$ 的等效折射率来代替转折点外区域的变化折射率。

为了检验积分平均法的可靠性,考虑以下形式的折射率分布

$$n^2(x) = \begin{cases} n_2^2 + (n_1^2 - n_2^2)f(x/d) & (x > 0) \\ n_0^2 & (x < 0) \end{cases} \quad (4.63)$$

式中, $f(x/d)$ 为三种典型的折射率分布函数,

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x/d) & \text{指数函数} \\ \exp(-x^2/d^2) & \text{高斯函数} \\ \operatorname{erfc}(x/d) & \text{余误差函数} \end{cases} \quad (4.64)$$

此外,为计算方便,引入无量纲的归一化频率 V 和归一化模指数 b ,即

$$V = k_0 d (n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$$

$$b = \frac{N^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}$$

选取 $n_0 = 1.0$, $n_2 = 2.177$ 和 $n_1^2 - n_2^2 = 0.187$,而 d 作为 V 变化的参数。通过计算,由积分平均法所得结果与由数值计算方法得到的精确值,以及 WKB 近似的数值比较分别由表 4.1、表 4.2 和表 4.3 列出。

表 4.1 指数分布的 $b(\text{TE}_0)$

V	精确值	积分平均值	WKB
2.0	0.105 0	0.103 5	0.108 6
3.0	0.229 2	0.227 4	0.233 1
4.0	0.321 2	0.319 4	0.324 9

表 4.2 高斯分布的 $b(\text{TE}_0)$

V	精确值	积分平均值	WKB
2.0	0.081 7	0.080 0	0.045 3
3.0	0.275 0	0.271 5	0.253 8
4.0	0.413 3	0.410 2	0.400 8

表 4.3 余误差分布的 $b(\text{TE}_0)$

V	精确值	积分平均值	WKB
3.0	0.067 5	0.065 7	0.028 2
4.0	0.169 4	0.167 2	0.129 3

由数值比较可以看出,积分平均法确实对 WKB 近似有所改进。对折射率缓变的指数函数分布和 V 值较大时的高斯分布,WKB 近似的精确度尚在可适用范围,但对变化剧烈的折射率分布(余误差函数)和 V 值较小时的高斯分布,WKB 近似已不再适用,但积分平均法对任何一种分布和所有的 V 值,都能给出合理的精度。

4.5.2 高精度近似分析法^[4.7]

等效衰减系数积分平均法考虑了转折点内区域的层间反射波的影响,并且用一等效指数衰减场代替转折点外的实际的衰减场,提高了色散方程的精确度和适用范围。但从所列表格可以看出,与精确值相比,积分平均法仍存在一定的误差,这种误差显然是由等效衰减系数的定义式(4.59)引起的。正如 WKB 近似忽略了反射波的影响一样,等效衰减系数的定义首先忽略了反射衰减波的影响;其次,式(4.59)的讨论仅限于从转折点到等效衰减场衰减到 $1/e$ 的范围,忽略了渗透深度以外的场的影响。为弥补以上缺陷,在这一节将建立一种高精度近似分析方法。与一般的数值计算方法不同,这种高精度分析提供了解析的色散方程;与现有的近似方法不同,这种分析所得的结果与数值计算方法得到的精确解在取四位有效数字情况下完全一致。

图 4.11 所示为任意折射率分布平板波导, n_0 、 n_1 和 n_2 的定义与图 4.10 相同。 x_t 仍为转折点处的坐标,同时假设坐标 $x_c = x_t + x_s$ 处的场足够小, x_c 右边折射率的变化对光波导传播特性的影响可忽略不计。为利用转移矩阵理论求解,首先把 $(0, x_t)$ 和 (x_t, x_c) 两区域分别分成 l 和 m 等份,每一小区域的厚度均为 h ,即有 $x_t = lh$ 和 $x_c = mh$ 。显然,在这两个区域中电磁场的形式是不同的。转折点内应是振荡场,而转折点外应是衰减场。因此对 TE 模,相应于第 i 和第 j 个小区域的

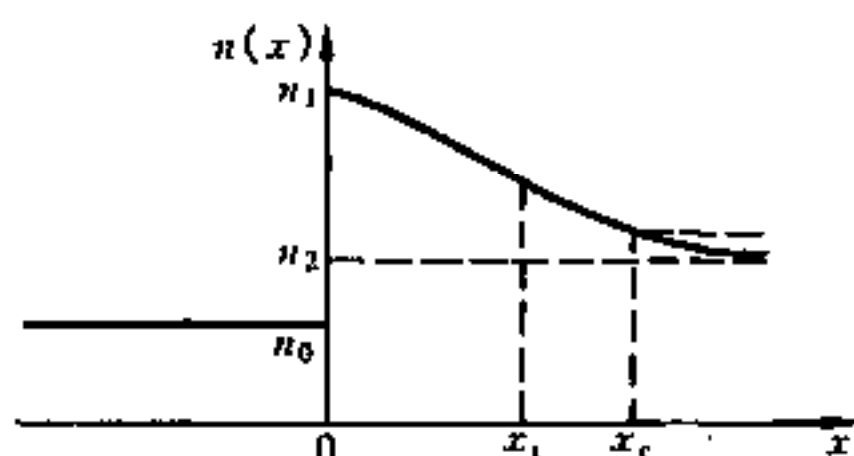


图 4.11 任意折射率分布的平板波导

转移矩阵可分别写为

$$M_i = \begin{bmatrix} \cos(\kappa_i h) & -\frac{1}{\kappa_i} \sin(\kappa_i h) \\ \kappa_i \sin(\kappa_i h) & \cos(\kappa_i h) \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, l) \quad (4.65)$$

$$M_j = \begin{bmatrix} \cosh(\alpha_j h) & -\frac{1}{\alpha_j} \sinh(\alpha_j h) \\ -\alpha_j \sinh(\alpha_j h) & \cosh(\alpha_j h) \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

($j = l+1, l+2, \dots, l+m$)

式中

$$\kappa_i = (k_0^2 n_i^2 - \beta^2)^{1/2}$$

$$\alpha_j = (\beta^2 - k_0^2 n_j^2)^{1/2}$$

利用边界条件,可得以下矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} E_y(0) \\ E'_y(0) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^l M_i \begin{bmatrix} E_y(x_t) \\ E'_y(x_t) \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

$$\begin{bmatrix} E_y(x_t) \\ E'_y(x_t) \end{bmatrix} = \prod_{j=l+1}^{l+m} M_j \begin{bmatrix} E_y(x_c) \\ E'_y(x_c) \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

与上节相同,这里仍用一等效的指数衰减场来代替转折点外的实际衰减场,但与上节不同的是,等效衰减系数 p_t 由矩阵方程(4.68)确定,而 p_t 的定义范围是 (x_t, x_c) 区域,即设

$$E_y(x) = A_t \exp[-p_t(x - x_t)] \quad (x_t < x < x_c) \quad (4.69)$$

于是利用式(4.67)和(4.68),可得到与式(4.60)和(4.61)完全一致的

色散方程。以下的工作是确定等效衰减系数 p_t 。由于前面假设 x_c 右边的折射率变化可忽略不计,即在区域 $x > x_c$, 折射率分布可用一恒定的折射率 $n(x_c)$ 近似,于是根据介质平板波导的波动方程,可知该区域的场应是指数衰减型,即有

$$E_y(x) = A_c \exp[-p_c(x - x_c)] \quad (x > x_c) \quad (4.70)$$

式中, A_c 为待定系数;而

$$p_c = [\beta^2 - k_0^2 n^2(x_c)]^{1/2} \quad (4.71)$$

再由式(4.68),可得

$$[p_t \quad 1] M_{l+1} M_{l+2} \cdots M_{l+m} \begin{bmatrix} 1 \\ -p_c \end{bmatrix} = 0 \quad (4.72)$$

利用矩阵(4.68)化简方程(4.72),可得确定等效衰减系数 p_t 的公式:

$$\tanh(\alpha_{l+1}h) = \frac{p_t - p_{l+2}}{\alpha_{l+1}(1 - p_t p_{l+2}/\alpha_{l+1}^2)} \quad (4.73)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} p_j &= \alpha_j \tanh \left[\operatorname{artanh} \left(\frac{p_{j+1}}{\alpha_j} \right) + \alpha_j h \right] \\ (j &= l+2, l+3, \cdots, l+m) \\ p_{l+m+1} &= p_c \end{aligned} \right\} \quad (4.74)$$

最后需要解决的问题是如何确定坐标 x_c , 因为只有确定了 x_c , 才可由式(4.71)得到 p_c , 从而根据式(4.73)和(4.74)得到 p_t 。显然, 转折点 x_t 是由波导的结构参数和光波长决定的, 而从 x_t 到 x_c 的长度 x_s , 如何确定才能保证色散方程的精度呢? 原则上 x_s 越大则精度应越高, 但花费的计算机时间越长, 而且 x_s 的任意选择也将带来理论的随意性。这里取 x_s 等于等效衰减场的穿透深度 $1/p_t$ 的整数倍, 而 s 的大小取决于所需的计算精度。根据计算结果可知,

$$x_s = s/p_t \quad (s = 1, 2, \cdots) \quad (4.75)$$

当 $s=1$ 时, 可得到三位有效数字的精确度, 而取 $s=2$ 时, 可得五位有效数字的精确度。

概括地说,方程(4.71)、(4.73)、(4.74)和(4.59)是确定等效衰减系数 p_t 的公式。即一旦知道了折射率分布 $n(x)$,便可由上述四式确定 p_t 。然后再与方程(4.60)和(4.61)联立,就可确定任意折射率分布平板波导的传播特性。为检验高精度近似分析方法的可靠性,仍以指数函数、高斯函数和余误差函数折射率分布为例,计算归一化频率 V 和归一化模指数 b 的关系,计算结果分别由表 4.4、表 4.5 和表 4.6 列出。为说明 $s=1$ 和 $s=2$ 时的精确度,表 4.4 中的计算值取了六位有效数字,而表 4.5 和表 4.6 仍取四位有效数字,并且只计算了 $s=2$ 时的数值。

表 4.4 指数分布的 $b(\text{TE}_0)$

V	精确值	高精度近似		WKB
		$s=1$	$s=2$	
2.0	0.104 954	0.105 038	0.104 951	0.108 613
3.0	0.229 188	0.229 408	0.229 189	0.233 076
4.0	0.321 179	0.321 445	0.321 182	0.324 927

表 4.5 高斯分布的 $b(\text{TE}_0)$

V	精确值	高精度近似 ($s=2$)	WKB
2.0	0.081 7	0.081 7	0.045 3
3.0	0.275 0	0.275 0	0.253 8
4.0	0.413 3	0.413 3	0.400 8

表 4.6 余误差分布的 $b(\text{TE}_0)$

V	精确值	高精度近似 ($s=2$)	WKB
3.0	0.067 5	0.067 5	0.028 2
4.0	0.169 4	0.169 4	0.129 3

上述计算结果表明,在实验可达到的测量精度范围之内(一般为四位有效数字),利用高精度近似方法提供的六个公式计算,所得结果与由数值方法求解方程得到的精确解完全一致,但高精度近似分析方法所用的计算机时间可大大减少。在计算精度要求较高的课题时,这是

一种行之有效的方法。

4.6 精确的分析矩阵方法^[4.8]

上节建立的两种等效衰减系数方法,针对 WKB 近似的缺陷,提出了改进的措施,因而得到了较 WKB 方法合理的结果。两种方法中,积分平均法公式简洁,花费的计算机时间较少,但精度有限,一般可保证小数点后两位有效数字的精度。而高精度近似分析方法中的公式较多,计算时比较麻烦,但可保证小数点后五位有效数字的精度。两种方法的共同缺点是:仅讨论了等效衰减系数的大小,但对量子力学和光波导理论中的一个重要问题——转折点处的相移,却未深入讨论。由于转折点处的相移不仅是影响 WKB 方法精确度的一个重要因素,而且牵涉到物理中的一些基本问题,因此,历年来一直引起广泛的重视,已建立了各种改进的 WKB 方法,例如:修改 WKB 方法匹配条件的近似^[4.9]、有效折射率接近截断点时的近似^[4.10]、折射率分布存在不连续点时的近似^[4.11]、以及利用格林函数的非整数 Maslov 指数方法^[4.12]等。但这些工作都是在 WKB 近似的框架中进行的,除了能提高一些 WKB 方法的精度之外,无法在物理上有所突破。本节在上节所得结果基础上,推导精确的分析方程,并讨论一些重要问题。

4.6.1 模式本征方程

(1) 存在一个转折点的情况 考虑图 4.12 所示的渐变折射率平板波导,折射率分布由下式确定:

$$n^2(x) = \begin{cases} n_2^2 + (n_1^2 - n_2^2)f(x/d) & (x > 0) \\ n_0^2 & (x < 0) \end{cases} \quad (4.76)$$

为了用转移矩阵求解,首先在远离转折点的 $x_s = x_t + x_c$ 处截断,在 x_s 处假设场足够小,在 $x > x_s$ 处假设有 $n(x) = n_s$ 。然后将区域 $(0, x_t)$ 和 (x_t, x_s) 分别分割为 l 和 m 等份,每层的厚度均为 h ,即有 $x_t = lh$ 和 $x_c = mh$ 。则对 TE 波,相应每一小层的转移矩阵分别为

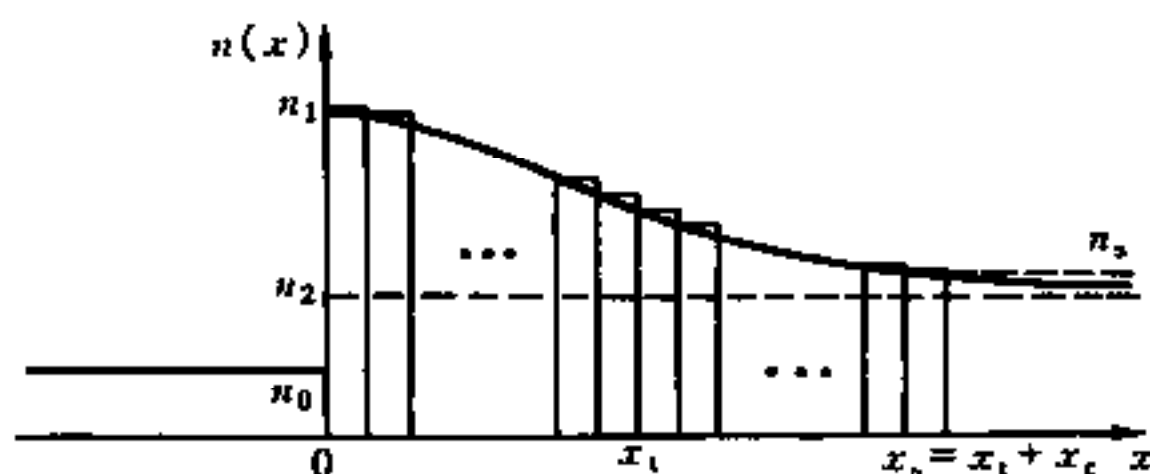


图 4.12 存在一个转折点渐变折射率波导

$$M_i = \begin{bmatrix} \cos(\kappa_i h) & -\frac{1}{\kappa_i} \sin(\kappa_i h) \\ \kappa_i \sin(\kappa_i h) & \cos(\kappa_i h) \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, l) \quad (4.77)$$

和

$$M_j = \begin{bmatrix} \cosh(\alpha_j h) & -\frac{1}{\alpha_j} \sinh(\alpha_j h) \\ -\alpha_j \sinh(\alpha_j h) & \cosh(\alpha_j h) \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

$$(j = l+1, l+2, \dots, l+m)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \kappa_i &= [k_0^2 n^2(x_i) - \beta^2]^{1/2} \\ \alpha_j &= [\beta^2 - k_0^2 n^2(x_j)]^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (4.79)$$

由转移矩阵理论可得矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} E_y(0) \\ E'_y(0) \end{bmatrix} = \left[\prod_{i=1}^l M_i \right] \left[\prod_{j=l+1}^{l+m} M_j \right] \begin{bmatrix} E_y(x_s) \\ E'_y(x_s) \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

容易知道, 在 $x < 0$ 和 $x > x_s$ 区域是指数衰减场, 即有

$$E_y(x) = \begin{cases} A_0 \exp(p_0 x) & (x < 0) \\ A_s \exp[-p_s(x - x_s)] & (x > x_s) \end{cases} \quad (4.81)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= (\beta^2 - k_0^2 n_0^2)^{1/2} \\ p_s &= (\beta^2 - k_0^2 n_s^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (4.82)$$

利用式(4.81), 方程(4.80)可写成

$$(-p_0 - 1) \left(\prod_{i=1}^l M_i \right) \left(\prod_{j=l+1}^{l+m} M_j \right) \begin{bmatrix} 1 \\ -p_s \end{bmatrix} = 0 \quad (4.83)$$

经过简单的代数运算,方程(4.83)变成

$$(-p_0 - 1) \left(\prod_{i=1}^l M_i \right) \begin{bmatrix} 1 \\ -p_t \end{bmatrix} = 0 \quad (4.84)$$

$$\text{式中} \quad p_t = p_{l+1} \quad (4.85)$$

$$\text{而} \quad \left. \begin{aligned} p_j &= a_j \frac{\sinh(a_j h) + \frac{p_{j+1}}{a_j} \cosh(a_j h)}{\cosh(a_j h) + \frac{p_{j+1}}{a_j} \sinh(a_j h)} \\ (j &= l+1, l+2, \dots, l+m) \\ p_{l+m+1} &= p_s \end{aligned} \right\} \quad (4.86)$$

由式(4.84)~(4.86)的推导,可知转折点外的场可用一衰减系数为 p_t 的指数场等效,即有

$$E_y(x) = A_t \exp[-p_t(x - x_t)] \quad (x > x_t) \quad (4.87)$$

对 $(0, x_t)$ 的区域,采用第3章中多层波导的推导方法,可得到方程

$$\sum_{i=1}^l \kappa_i h + \Phi(s) = N\pi + \arctan\left(\frac{p_0}{\kappa_1}\right) + \arctan\left(\frac{p_t}{\kappa_l}\right) \quad (N = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.88)$$

式中

$$\Phi(s) = \sum_{i=1}^{l-1} \left[\Phi_{i+1} - \arctan\left(\frac{\kappa_{i+1}}{\kappa_i} \tan \Phi_{i+1}\right) \right] \quad (4.89)$$

$$\Phi_i = \arctan\left(\frac{p_i}{\kappa_i}\right) \quad (4.90)$$

$$\text{而} \quad p_i = \kappa_i \tan \left[\arctan\left(\frac{p_{i+1}}{\kappa_i}\right) - \kappa_i h \right] \quad (i = 1, 2, \dots, l) \quad (4.91)$$

显然,当 $l \rightarrow \infty (h \rightarrow 0)$ 时,式(4.88)转变为相位积分的简单形式

$$\int_0^{x_t} \kappa dx + \Phi(s) = N\pi + \arctan\left(\frac{p_0}{\kappa_1}\right) + \arctan\left(\frac{p_t}{\kappa_l}\right) \quad (N = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.92)$$

(2) 存在两个转折点的情况 考虑图 4.13 所示的存在两个转折点 x_{c1} 和 x_{c2} 的渐变折射率平板波导, 假设折射率分布 $n(x)$ 在 x_C 和 x_D

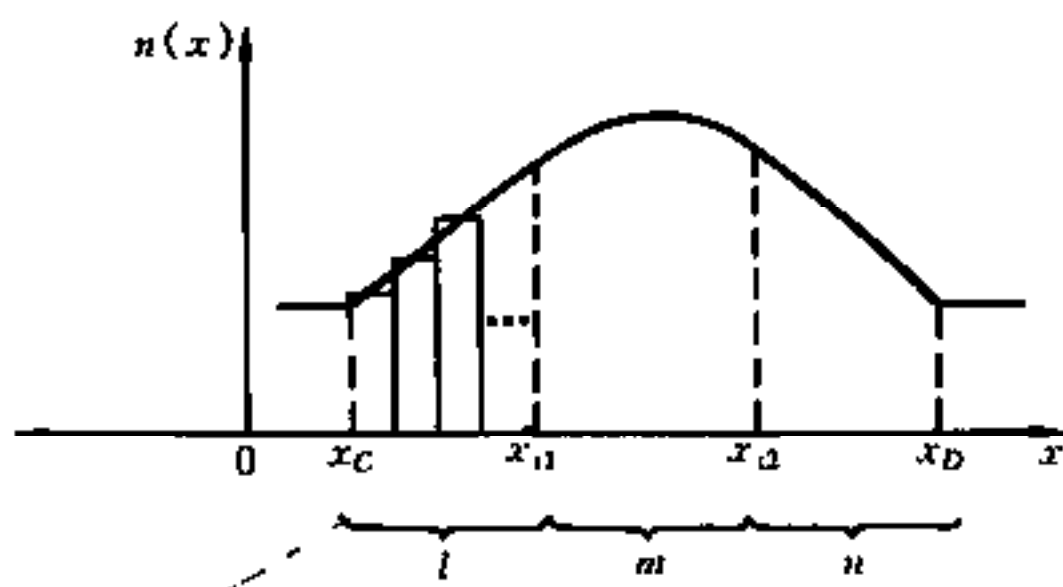


图 4.13 存在两个转折点的渐变折射率波导

两点处截断, 并把区域 (x_C, x_{c1}) 、 (x_{c1}, x_{c2}) 和 (x_{c2}, x_D) 分别分为 l 、 m 和 n 等份, 每层的厚度均为 h , 则利用分析转移矩阵方法, 可得色散方程:

$$\int_{x_{c1}}^{x_D} \kappa dx + \Phi(s) = N\pi + \arctan\left(\frac{p_l}{\kappa_{l+1}}\right) + \arctan\left(\frac{p_{l+m+1}}{\kappa_{l+m}}\right) \quad (N = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.93)$$

式中

$$\Phi(s) = \sum_{j=l+1}^{l+m+1} \left[\Phi_{j+1} - \arctan\left(\frac{\kappa_{j+1}}{\kappa_j} \tan \Phi_{j+1}\right) \right] \quad (4.94)$$

$$\Phi_j = \arctan\left(\frac{p_j}{\kappa_j}\right) \quad (4.95)$$

p_l 和 p_{l+m+1} 分别对应于区域 $(x < x_{c1})$ 和 $(x > x_{c2})$ 的等效衰减系数, 它们由以下两式确定:

$$p_i = a_i \frac{\sinh(a_i h) + \frac{p_{i-1}}{a_i} \cosh(a_i h)}{\cosh(a_i h) + \frac{p_{i-1}}{a_i} \sinh(a_i h)} \quad (i = 1, 2, \dots, l) \quad (4.96)$$

式中 $p_0 = p_C$, 而 $p_C = [\beta^2 - k_0^2 n^2(x_C)]^{1/2}$

$$p_k = \alpha_k \frac{\sinh(\alpha_k h) + \left(\frac{p_{k+1}}{\alpha_k}\right) \cosh(\alpha_k h)}{\cosh(\alpha_k h) + \left(\frac{p_{k+1}}{\alpha_k}\right) \sinh(\alpha_k h)}$$

$$(k = l + m + 1, l + m + 2, \dots, l + m + n) \quad (4.97)$$

式中 $p_{l+m+n+1} = p_D$, 而 $p_D = [\beta^2 - k_0^2 n^2(x_D)]^{1/2}$ 。

4.6.2 转折点处的相移

由上节的分析可知,转折点外的场是衰减的,且可用一指数衰减系数为 p_t 的场等效。这说明转折点外的渐变折射率分布,可用一恒定的、小于 $n(x_t)$ 的折射率 n_{eq} 等效,如图 4.14 所示。

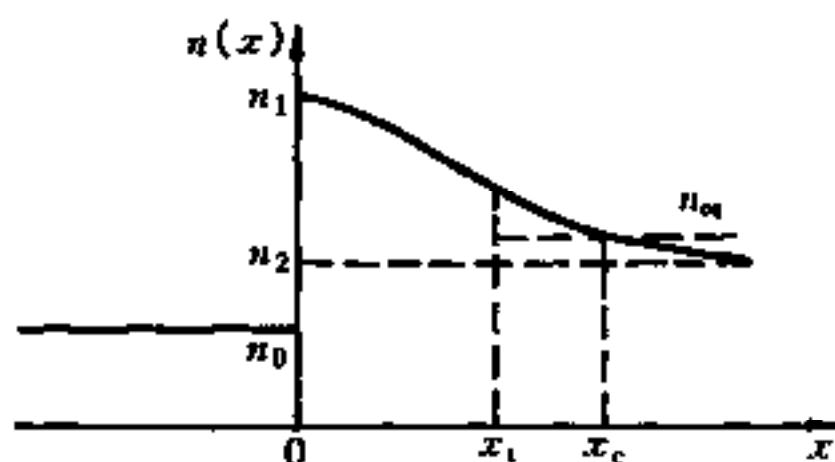


图 4.14 用等效折射率 n_{eq} 代替转折点外的渐变折射率分布

与图 4.9 比较,可以看出两者的不同本质:WKB 方法是用一恒定的折射率 $n(x_t)$ 代替转折点外的渐变折射率分布;而分析矩阵方法中的 $n_{eq} < n(x_t)$ 。

根据以上分析,可得等效指数衰减系数

$$p_t = (\beta^2 - k_0^2 n_{eq}^2)^{1/2} \quad (4.98)$$

在无泄漏情况下, p_t 一定是正实数。再由式(4.79)可知,当 $l \rightarrow \infty$ ($h \rightarrow 0$) 时,有

$$\kappa_l = [k_0^2 n^2(x_l) - \beta^2]^{1/2} \rightarrow [k_0^2 n^2(x_t) - \beta^2]^{1/2} = 0 \quad (4.99)$$

则转折点处的相移为

$$2 \arctan\left(\frac{p_t}{\kappa_l}\right) = \pi \quad (4.100)$$

与传统的 WKB 方法、改进的 WKB 方法、以及非整数 Maslov 指数等方

法比较,以上结果有如下特点:

① 转折点处的相移是常数 π 。它不但与传播常数无关,而且与折射率分布的形状也无关,是普遍的。

② 与转折点是否靠近折射率分布的截断点和不连续点无关。

③ 与波长无关,即可适用于两个转折点十分靠近的折射率分布。

利用式(4.100),则对图 4.12 所示的具有一个转折点的折射率分布,式(4.92)转变为如下形式:

$$\int_0^{x_1} k dx + \Phi(s) = m\pi + \tan\left(\frac{p_0}{\kappa_1}\right) + \frac{\pi}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.101)$$

其中散射子波的相位贡献由式(4.89)给出。

对图 4.13 所示的存在两个转折点的折射率分布,方程(4.93)变为

$$\int_{x_a}^{x_b} k dx + \Phi(s) = (N + 1)\pi \quad (N = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.102)$$

从完全不同于 WKB 近似的路径出发,得到了物理意义十分清楚的模式本征方程。与 WKB 方法比较,方程(4.101)和(4.102)不但保持了相位积分方程简单的形式,而且可给出精确的模式本征值和转折点处的相移。同样重要的是:提出了散射子波相位贡献的概念,而在 WKB 方法和改进的 WKB 方法中,散射子波的相位贡献是被忽略的。

必须指出的是,正切函数在宗量趋向 $\pi/2$ 过程中变化极快,这意味着,要使式(4.100)在设定的精度下成立,分层数 l 必须足够大。这就极大地增加了计算时间。实际的计算过程表明:利用方程(4.92),虽然需计算等效衰减系数 p_i 和最接近转折点处横向波矢 k_i ,但分层数 l 只要取数百即能达到理想的结果。因此,在处理实际问题时,使用方程(4.92)比使用式(4.101)更节省计算时间。同样的情况也适用于方程(4.93)和(4.102)。

4.6.3 关于折射率不连续平板波导的计算实例

对于折射率不连续或导数不连续分布的平面波导,WKB 方法不能给出合理的结果,计算误差很大^[4.4]。为了解决这一问题,

R. Srivastava^[4.10]和 F. Xiang^[4.11]提出了改进的 WKB 方法(MWKB)。这两种方法的实质是对 WKB 方法中转折点处的相移作修正,他们的结论是:转折点处的相移不是 $\pi/2$,而是一个与折射率分布、导模传播常数和模序数有关的数。通过对转折点处相移的修正,他们得到了较 WKB 方法合理的计算结果。但是,由于这种修改的基础是 WKB 近似理论,并未脱离 WKB 近似框架。因此无法得到精确的计算结果是可以预料的。

为了验证分析转移矩阵方法(ATMM)的可靠性,考虑图 4.15 所示的折射率不连续的平板波导,其折射率分布为

$$n^2(x) = \begin{cases} \{n_2 + \delta n \exp[-(x-d)^2/a^2]\}^2 & (x \geq 0) \\ n_0^2 & (x < 0) \end{cases} \quad (4.103)$$

式中, $n_0 = 1$; $n_2 = 1.512$; $\delta n = n_1 - n_2 = 0.0833$; $d = 2.60\mu\text{m}$, $a = 2.66\mu\text{m}$ 。

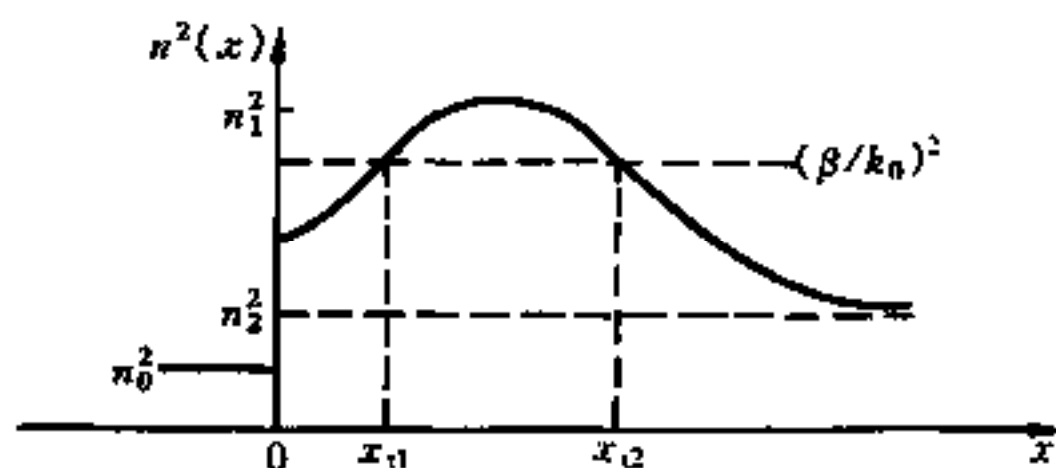


图 4.15 折射率不连续的渐变折射率波导

利用 ATMM 计算了上述折射率不连续波导的有效折射率 $\left(\frac{\beta}{k_0}\right)$,并与 WKB、MWKB 以及精确的数值方法进行比较,所得结果由表 4.7 所示。从表中可见 ATMM 方法比 MWKB 方法更为有效。实际上,当分层数越大时,ATMM 的精度越高,最后可达到精确值。

表 4.7 由 ATMM、WKB、MWKB 计算所得的有效折射率 β/k_0 与精确值的比较

模序数 N	EXACT	ATMM	WKB	MWKB
0	1.589 35	1.589 34	1.589 25	1.589 26
1	1.577 75	1.577 74	1.577 65	1.577 65
2	1.566 80	1.566 78	1.566 70	1.566 68
3	1.556 35	1.556 33	1.556 50	1.556 25
4	1.546 20	1.546 19	1.547 05	1.546 11
5	1.536 25	1.536 25	1.535 80	1.536 18
6	1.526 80	1.526 78	1.526 55	1.526 72
7	1.518 50	1.518 48	1.518 30	1.518 39

4.6.4 线性谐振子“事件”

在量子力学中,对特定的线性谐振子的势函数,WKB 近似可给出精确的能量本征值。这一结果被看作一次意外的“事件”^[4.13]。发生这一“事件”的原因却不清楚。为解释这一似乎矛盾的现象,对折射率为平方律分布(线性谐振子势在光波导中的类比)的光波导,利用方程(4.102)进行了数值计算。发现对这一特定的分布,散射子波的位相贡献 $\Phi(s)$ 正好等于 $\pi/2$,于是方程(4.102)与 WKB 近似的色散方程(4.45)完全一致。这个例子从另一方面反映了 WKB 方法的近似实质:在方程(4.45)左边忽略了散射子波的位相贡献,而在方程的右边错误地用相移 $\pi/2$ 代替正确的相移 π 。

若把方程(4.102)写成如下形式:

$$\int_{x_d}^{x_a} \kappa dx = \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \Phi(s)\right) \quad (4.104)$$

$$(N = 0, 1, 2, \dots)$$

仅当

$$\frac{\pi}{2} - \Phi(s) = 0$$

时,方程(4.104)才与方程(4.45)一致。遗憾的是 $\Phi(s)$ 一般不等于

$\pi/2$, 这就是 WKB 方法不能给出精确本征值的原因。

4.6.5 积分形式的散射子波位相贡献^[4.14]

在精确的本征方程(4.101)和(4.102)中, 散射子波的位相贡献 $\Phi(s)$ 是以求和形式出现的, 这说明方程的精度尚依赖于分析中的薄膜分割这一中间过程, 因而影响了理论的完美性。本节的工作是对求和形式的 $\Phi(s)$ 进行改造, 以便得到一个完全解析的公式。根据式(4.89)和(4.90), 有

$$\begin{aligned}\Phi_i - \arctan\left(\frac{\kappa_i}{\kappa_{i-1}} \tan \Phi_i\right) &= \\ \arctan\left(\frac{p_i}{\kappa_i}\right) - \arctan\left(\frac{p_i}{\kappa_{i-1}}\right) &\approx \\ \frac{p_i}{\kappa_i^2 + p_i^2}(\kappa_{i-1} - \kappa_i) &\end{aligned}\quad (4.105)$$

上式的推导中忽略了一个二阶小量, 在物理上是忽略了二次散射子波的位相贡献。

利用式(4.105), 散射子波的位相贡献可写成

$$\Phi(s) = \int_{x_u}^{x_a} \frac{p(x)}{\kappa^2(x) + p^2(x)} \cdot \frac{d\kappa(x)}{dx} dx \quad (4.106)$$

再由式(4.91), 可得

$$\kappa_i h = \arctan\left(\frac{p_{i+1}}{\kappa_i}\right) - \arctan\left(\frac{p_i}{\kappa_i}\right) \quad (4.107)$$

在 $h \rightarrow 0$ 的极限下, 可得以下关于 $p(x)$ 的微分方程, 即

$$\frac{dp(x)}{dx} = \kappa^2(x) + p^2(x) \quad (4.108)$$

式(4.106)和(4.108)确定了散射子波位相贡献的大小。这时, 方程(4.102)可变成如下形式:

$$\int_{x_u}^{x_a} \kappa dx + \int_{x_u}^{x_a} \frac{p}{\kappa^2 + p^2} \cdot \frac{d\kappa}{dx} dx = (N+1)\pi \quad (N=0, 1, 2, \dots) \quad (4.109)$$

方程(4.109)用积分形式代替了求和形式的散射子波位相贡献,这是一种进步。但仍有不足之处:首先,方程中 $p(x)$ 的物理意义不明确;其次,方程只考虑了一次散射子波的位相贡献,所以式(4.109)是一个近似方程。

参考文献

- [4.1] Adams M. J. . An introduction to optical waveguides. Binghamton: Vail-Ballou Press, 1981.
- [4.2] Marcuse D. , Appl. Opt. , 1976, 15(12):2949~2950.
- [4.3] Schiff, L. I. . Quantum mechanics. New York: McGraw-Hill, 1955.
- [4.4] Gedeon A. , Opt. Commun. 1974, 12(3):329~332.
- [4.5] R. V. Ramaswamy, R. K. Lagu. J. Lightwave Technol. , 1983, 3:408~409.
- [4.6] 曹庄琪. 光学学报, 1994, 14(11): 1223~1226.
- [4.7] 曹庄琪, 詹黎. 光学学报, 1994, 14(12):1240~1243.
- [4.8] Z. Cao. , Y. Jiang. . J. Opt. Soc. Am. A, 1999, 16(9):2209~2212.
- [4.9] V. S. Popov, B. M. Kamakov, V. D. Mur. Phys. Lett. , 1996, A210:402~408.
- [4.10] R. Srivastava, C. K. Kao, R. V. Ramaswamy. J. Lightwave Technol, 1987, 15(11):1605~1609.
- [4.11] F. Xiang, Gar Lam Yip. J. lightwave Technol. , 1994, 12(3):443.
- [4.12] H. Friedrich, J. Trost. Phys. Rev. A, 1996, 54(2):1136~1145.
- [4.13] A. Messiah. Quantum Mechanics Vol. I . North-Holland, Amsterdam, 1964.
- [4.14] Zhan. L. , Cao. Z. , J. Opt. Soc. Am. A, 1998, 15(3): 713~716.

第 5 章 周期性波导

5.1 引言

在光学中,衍射光栅已经为大家所熟知,而周期性的金属波导对从事微波行波管的人来说,也并不陌生。周期性波导的早期研究,对导波光学的发展有着深远的影响。目前,周期性波导已成为一个重要的集成光学元件,并在光栅耦合器、滤波器、分布反馈激光器以及分布布喇格反射激光器等器件中获得了广泛的应用。周期性波导的分析处理大多采用耦合模理论^[5,1],这个理论适用性强,处理模式之间的耦合非常有效。但该理论也有一些不足之处,例如,物理意义不够清晰、数学处理比较繁琐等。本章采用转移矩阵理论分析周期性波导,首先讨论简单的矩形皱阶周期性波导,然后考虑任意形状皱阶周期性波导,都得到了较为满意的结果。

5.2 矩形皱阶周期性波导^[5,2]

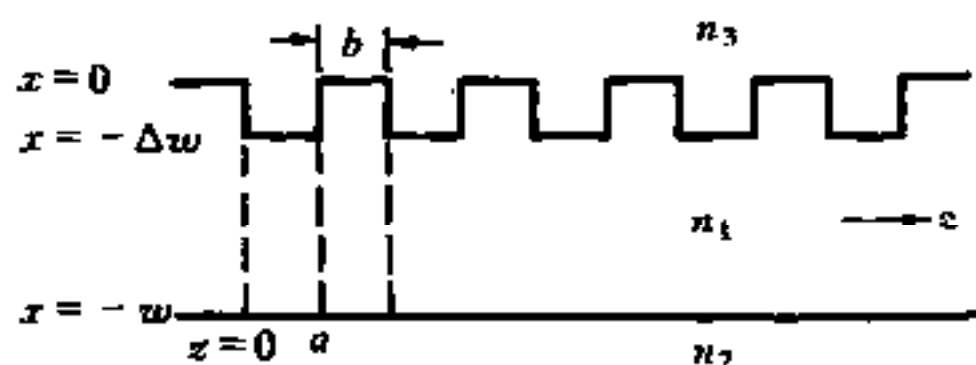


图 5.1 矩形皱阶周期性波导

5.2.1 从矩形皱形周期性波导到多层光学薄膜的变换

矩形皱阶周期性波导如图 5.1 所示。设 n_1 、 n_2 和 n_3 分别为导波层、衬底和覆盖层的折射率,光导波沿坐标 z 方向传播。图中 a 和 b 分别是皱阶阱区和垒区的宽度,而 $\Lambda = a + b$ 是皱阶周期,或称为基。 w 为导波层厚度, Δw 是皱阶高度。通常把有皱阶的区域称为微扰波导,而无皱阶的区域称为非微扰波导。为节省篇幅,本章只讨论 TE 模,有关 TM 模的分析留给读者解决。

非微扰波导 TE 模的模式本征方程为

$$k_x w = m\pi + \arctan\left(\frac{q}{k_x}\right) + \arctan\left(\frac{p}{k_x}\right) \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.1)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} q &= (k_x^2 - k_0^2 n_3^2)^{1/2} \\ p &= (k_x^2 - k_0^2 n_2^2)^{1/2} \\ k_x &= (k_0^2 n_1^2 - k_x^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

k_x 为导模的传播常数。利用 k_x 和 k_z 的关系, q 和 p 分别用 k_x 的函数表示:

$$\left. \begin{aligned} q &= [k_0^2(n_1^2 - n_3^2) - k_x^2]^{1/2} \\ p &= [k_0^2(n_1^2 - n_2^2) - k_x^2]^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

于是,在波导三层区域折射率和光波长确定的情况下,方程(5.1)变为仅有两个参量 k_x 和 w 的方程,对式(5.1)求 dk_x/dw ,可得

$$\frac{dk_x}{k_x} = -\frac{dw}{w_{\text{eff}}} \quad (5.4)$$

式中波导有效厚度

$$w_{\text{eff}} = w + \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \quad (5.5)$$

在 $\Delta w \ll w$ 的情况下,可用微扰方法处理,这时可把式(5.4)近似写为

$$\frac{\Delta k_x}{k_x} = - \frac{\Delta w}{w_{\text{eff}}} \quad (5.6)$$

由 k_x 和 k_z 的关系, 可得

$$k_x \Delta k_x = - k_z \Delta k_z \quad (5.7)$$

把式(5.7)代入(5.6), 可得

$$\frac{\Delta k_x}{k_x} = \left(\frac{k_x}{k_z} \right)^2 \frac{\Delta w}{w_{\text{eff}}} \quad (5.8)$$

式(5.8)表明, 导波层厚度的变化将引起波导模式本征值的变化, 若采用波导有效折射率的概念, 则可以把式(5.8)改写成

$$\frac{\Delta N}{\Delta w} = \frac{N}{w_{\text{eff}}} \left(\frac{n_1^2}{N^2} - 1 \right) \quad (5.9)$$

式中 $N = k_z/k_0$ 。由于波导有效折射率的取值范围为 $n_2 < N < n_1$, 则由式(5.9)可以看出, 必有

$$\frac{\Delta N}{\Delta w} > 0 \quad (5.10)$$

上式说明, 波导有效折射率随导波层厚度的变化是一个单调的递增函数。因此, 在图 5.1 所示的矩形皱阶周期性波导中, 可以认为处于皱阶阱区的波导有效折射率小于处于皱阶垒区的波导的有效折射率, 即周期性波导微扰区的有效折射率是随空间周期性变化的函数。于是, 图 5.1 所示的几何形状为周期性变化的微扰波导可等效为图 5.2 所示的有效折射率周期性变化的多层光学薄膜。这样, 二维的电磁场问题就转变成一维的简单问题, 为分析周期性波导的传输特性奠定了基础。

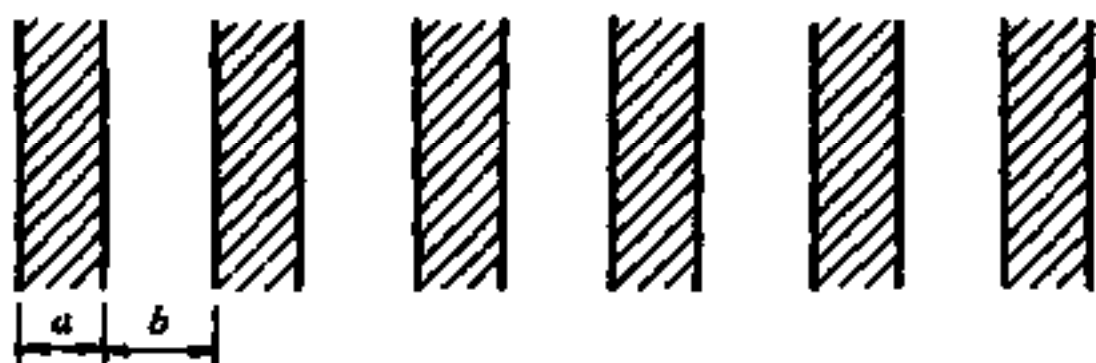


图 5.2 有效折射率周期性变化的多层光学薄膜

5.2.2 转移矩阵与耦合系数

在周期性多层光学薄膜中传播的一维平面波满足波动方程

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k_z^2 E_y = 0 \quad (5.11)$$

设在对应皱阶阱区的薄膜中,传播常数 $k_z = \alpha$,而在对应皱阶垒区的薄膜中, $k_z = \beta$ 。由式(5.10)可知 $\beta > \alpha$,并设

$$\alpha = \beta - \Delta\beta \quad (5.12)$$

由于 $\Delta w \ll w$,故必有

$$\Delta\beta \ll \beta \quad (5.13)$$

在图(5.1)所示的皱阶阱区($0 < z < a$),方程(5.11)的解可写为

$$E_y(z) = Ce^{i\alpha z} + De^{-i\alpha z} \quad (5.14)$$

而 $E_y(z)$ 对 z 的一阶导数为

$$E'_y(z) = i\alpha(Ce^{i\alpha z} - De^{-i\alpha z}) \quad (5.15)$$

用 $z=0$ 和 $z=a$ 代入(5.14)和(5.15)两式,并写成矩阵形式,可得方程

$$\begin{bmatrix} E_y(a) \\ E'_y(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha a) & \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha a) \\ -\alpha \sin(\alpha a) & \cos(\alpha a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y(0) \\ E'_y(0) \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

记

$$M(a) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha a) & \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha a) \\ -\alpha \sin(\alpha a) & \cos(\alpha a) \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

显然,矩阵 $M(a)$ 与第2章中引入的转移矩阵具有完全相同的形式。不过,此处的转移矩阵联系纵向(波传播方向 z)区域两边界的场和场的一阶导数。由此可见,转移矩阵的使用范围是极为广泛的。

利用完全相同的步骤,可得到对应皱阶垒区($a < z < a+b$)的转移矩阵

$$M(b) = \begin{bmatrix} \cos(\beta b) & \frac{1}{\beta} \sin(\beta b) \\ -\beta \sin(\beta b) & \cos(\beta b) \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

利用转移矩阵的传递性质,可知对应皱阶的基,即一个微扰周期($\Lambda = a + b$)的转移矩阵应是对应皱阶阱区和皱阶垒区两个子转移矩阵的乘积,即有

$$M(\Lambda) = M(b) \cdot M(a) \quad (5.19)$$

这里应注意两个子转移矩阵的先后次序,相互之间不能交换。这种先后次序反映了转移矩阵的传递方向。由式(5.19)规定的传递是沿 $-z$ 方向的,当然也可沿 z 方向传递,但这时 $M(a)$ 和 $M(b)$ 必须用它们的逆矩阵代替。式(5.19)右边子矩阵的次序也必须交换。

由式(5.17), (5.18)和(5.19),不难得到对应一个微扰周期的转移矩阵

$$M(\Lambda) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} m_{11} &= \cos(\beta b) \cos(\alpha a) - \frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta b) \sin(\alpha a) \\ m_{12} &= \frac{1}{\alpha} \cos(\beta b) \sin(\alpha a) + \frac{1}{\beta} \sin(\beta b) \cos(\alpha a) \\ m_{21} &= -\beta \sin(\beta b) \cos(\alpha a) - \alpha \cos(\beta b) \sin(\alpha a) \\ m_{22} &= \cos(\beta b) \cos(\alpha a) - \frac{\beta}{\alpha} \sin(\beta b) \sin(\alpha a) \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

设周期性波导共有 n 个微扰周期,由于对应这些微扰周期的转移矩阵都是相同的,故对应周期性波导整个微扰区的转移矩阵应是对应一个微扰周期转移矩阵的 n 次方。即有

$$M(n\Lambda) = \underbrace{M(\Lambda) \cdot M(\Lambda) \cdots M(\Lambda)}_{n \uparrow} = [M(\Lambda)]^n \quad (5.22)$$

根据转移矩阵的性质,有

$$M(n\Lambda) = \begin{bmatrix} m_{11}U_{n-1}(\chi) - U_{n-2}(\chi) & m_{12}U_{n-1}(\chi) \\ m_{21}U_{n-1}(\chi) & m_{22}U_{n-1}(\chi) - U_{n-2}(\chi) \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

式中

$$\chi = \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22}) \quad (5.24)$$

而 $U_n(\chi)$ 是第二类切比雪夫(Chebyshev)多项式

$$U_n(\chi) = \frac{\sin[(n+1)\arccos\chi]}{\sqrt{1-\chi^2}} \quad (5.25)$$

为了以后计算上的方便,记

$$M(n\Lambda) = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

由式(5.21)和(5.24),可得

$$\chi = \cos(\beta b)\cos(\alpha a) - \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}\right)\sin(\beta b)\sin(\alpha a) \quad (5.27)$$

由式(5.12)和(5.13),并把 $\Delta\beta/\beta$ 看作为一阶小量,在保留二阶小量情况下,式(5.27)可近似为

$$\chi = \cos(\beta b + \alpha a) - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\beta}{\beta}\right)^2\sin(\beta b)\sin(\alpha a) \quad (5.28)$$

令

$$\chi = \cos(\beta'\Lambda) \quad (5.29)$$

根据 β 和 α 的意义,容易看出 β' 是光导波在周期性微扰中的传播常数,对应电子波在晶格周期势中的传播,可知 β' 是布洛赫(Bloch)波的波矢。为讨论方便,把组成微扰周期(基)的两薄膜称为基膜,而当基膜的光学厚度约为四分之一波长的奇数倍时,以下两种情况具有特别重要的意义:

① 当两基膜的光学厚度相等时,即有

$$\alpha a = \beta b \approx (2l+1)\frac{\pi}{2} \quad (l=0,1,2,\dots) \quad (5.30)$$

② 当两基膜的光学厚度相差半波长时,

$$\alpha a \approx (2l+1)\frac{\pi}{2}, \text{ 而 } \beta b = (2l+3)\frac{\pi}{2} \quad (5.31)$$

显然,在上述两种情况下,都有

$$\alpha a + \beta b \approx m\pi \quad (m=0,1,2,\dots) \quad (5.32)$$

考察式(5.28),可以发现在此情况下, $|\chi|$ 可以超过 1,则由式(5.29)的定义,可知周期性波导微扰区中的传播常数 β' 一定是个复量,假设 β'

满足下述关系

$$\beta' = \beta_0 + is \quad (5.33)$$

式中, $\beta_0 = m\pi/\Lambda$, 而 s 是实数, 称为衰减系数, 其意义将在以下分析中得到证明。若把 $\alpha a + \beta b = m\pi$ 称为位相匹配条件, 则对位相匹配条件的微小偏差可定义为

$$\delta = m\pi - (\alpha a + \beta b) \quad (5.34)$$

利用式(5.29)和(5.33), 可得

$$\begin{aligned} \chi &= \cos(\beta' \Lambda) = \\ &= \cos(m\pi + is\Lambda) = \\ &= (-1)^m \cosh(s\Lambda) \end{aligned} \quad (5.35)$$

而

$$\begin{aligned} \cos(\beta b + \alpha a) &= \cos(m\pi - \delta) = \\ &= (-1)^m \cos\delta \end{aligned} \quad (5.36)$$

再考察式(5.28)右边第二项, 当式(5.30)成立时(m 为奇数), 两正弦函数的乘积为正; 而当式(5.31)成立时(m 为偶数), 两正弦函数的乘积为负。因此, 无论是哪种情况, 式(5.28)均变为

$$\cosh(s\Lambda) = \cos\delta + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\beta}{\beta} \right)^2 \quad (5.37)$$

在 s 和 δ 足够小时, 可利用级数展开方法, 在忽略二阶以上高阶小量情况下, 式(5.37)简化为

$$s^2 = \left(\frac{\Delta\beta}{\beta\Lambda} \right)^2 - \left(\frac{\delta}{\Lambda} \right)^2 \quad (5.38)$$

记

$$\kappa_c = \frac{\Delta\beta}{\beta\Lambda} \quad (5.39)$$

它表示一个微扰周期中传播常数的相对变化。对照耦合模理论^[5.1]中的相应参数, 可知 κ_c 即为耦合系数。耦合系数的大小反映了“前进波”和“后退波”之间能量交换的快慢程度。

利用式(5.8), 可得

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} = \frac{\kappa^2 \Delta w}{\beta^2 w_{\text{eff}}} \quad (5.40)$$

式中, κ 和 β 取代了 k_x 和 k_z , 再把式(5.40)代入式(5.39)中, 即可得到耦合系数

$$\kappa_c = \frac{\kappa^2 \Delta w}{\beta^2 \Lambda w_{\text{eff}}} \quad (5.41)$$

上述耦合系数公式的物理意义极为明确: 耦合系数 κ_c 的大小与横向波矢的平方 κ^2 以及微扰 Δw 成正比; 而与纵向波矢的平方 β^2 、微扰周期 Λ 以及波导有效厚度 w_{eff} 成反比。在耦合模理论中, 耦合系数用一与横向模场有关的积分公式表示, 其形式远比式(5.41)复杂。在下一节中将会看到, 通过数值计算可以证明, 利用转移矩阵理论导出的结果更接近于精确值。另外, 本节所用的近似条件 $\Delta w \ll w$, 比耦合模理论所用的缓变近似条件, 意义更为清楚, 它实际上就是微扰近似需要的条件, 而缓变近似条件的意义并非是直接的。

5.2.3 前进波与后退波

本小节首先推导周期性波导整个微扰区对应的转移矩阵 $M(n\Lambda)$, 并利用该矩阵以及微扰区的边界条件求出前进波和后退波的具体公式, 在此基础上, 再推导光通过周期性波导时的透射率和反射率。为方便计, 本节仅考虑 $m=1$ 的情况。

利用式(5.25)和(5.33), 可得

$$U_{n-1}(\chi) = \frac{\sin(n \arccos \chi)}{\sqrt{1-\chi^2}} = (-1)^n \frac{\sinh(ns\Lambda)}{\sinh(s\Lambda)} \quad (5.42)$$

再利用式(5.12)、(5.13)和(5.21), 可得

$$\left. \begin{aligned} m_{11} &= \cos(\beta b + \alpha a) + \frac{\Delta\beta}{\beta} \sin(\beta b) \sin(\alpha a) \\ m_{12} &= \frac{1}{\beta} \sin(\beta b + \alpha a) + \frac{\Delta\beta}{\beta^2} \cos(\beta b) \sin(\alpha a) \\ m_{21} &= -\beta \sin(\beta b + \alpha a) + \Delta\beta \cos(\beta b) \sin(\alpha a) \\ m_{22} &= \cos(\beta b + \alpha a) - \left[\frac{\Delta\beta}{\beta} + \left(\frac{\Delta\beta}{\beta} \right)^2 \right] \sin(\beta b) \sin(\alpha a) \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

然后,利用式(5.28)、(5.29)、(5.32)、(5.33)和(5.34),可得

$$\left. \begin{aligned} \cos(\beta b + \alpha a) &= -\cosh(s\Lambda) + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\beta}{\beta}\right)^2 \sin(\beta b) \sin(\alpha a) \\ \sin(\beta b + \alpha a) &\approx \delta \end{aligned} \right\} (5.44)$$

把式(5.44)代入(5.43),然后利用式(5.23),可得对应周期性波导整个微扰周期的转移矩阵

$$M(n\Lambda) = \begin{bmatrix} (-1)^{n-1} \cosh(ns\Lambda) + \Delta_{11} & (-1)^n \frac{\delta}{\beta \Lambda} \sinh(ns\Lambda) + \Delta_{12} \\ (-1)^{n-1} \frac{\beta b}{s\Lambda} \sinh(ns\Lambda) + \Delta_{21} & (-1)^{n-1} \cosh(ns\Lambda) + \Delta_{22} \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

式中,

$$\Delta_{11} = (-1)^n \frac{\sinh(ns\Lambda)}{\sinh(s\Lambda)} \cdot \left[\frac{\Delta\beta}{\beta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\beta}{\beta} \right)^2 \right] \sin(\beta b) \sin(\alpha a)$$

$$\Delta_{12} = (-1)^n \frac{\sinh(ns\Lambda)}{\sinh(s\Lambda)} \cdot \frac{\Delta\beta}{\beta^2} \cos(\beta b) \sin(\alpha a)$$

$$\Delta_{21} = (-1)^n \frac{\sinh(ns\Lambda)}{\sinh(s\Lambda)} \cdot \Delta\beta \cos(\beta b) \sin(\alpha a)$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{n-1} \frac{\sinh(ns\Lambda)}{\sinh(s\Lambda)} \cdot \left[\frac{\Delta\beta}{\beta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\beta}{\beta} \right)^2 \right] \sin(\beta b) \sin(\alpha a)$$

与矩阵元中的主量比较,上述参量为小量,但在计算中不可忽略,否则将导致错误的结果。

下面根据周期性波导整个微扰区对应的转移矩阵 $M(n\Lambda)$,进一步求解“前进波”和“后退波”的具体表达式。为此,需确定必要的边界条件。设入射波在 $z=0$ 边界上的振幅为 1,在该界面上反射波的振幅为 A ,而透射波在 $z=n\Lambda$ 界面上的振幅为 B 。则按照图 5.3 可知,入射波,反射波和透射波之间的关系可由下式给出



图 5.3 周期性波导中的入射波、反射波和透射波

$$B \begin{bmatrix} 1 \\ i\beta \end{bmatrix} e^{i\beta n\Lambda} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + A \\ i\beta(1 - A) \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

利用式(5.46),可以推得入射波在 $z = n\Lambda$ 边界上的值为

$$B e^{i\beta n\Lambda} = \frac{2i\beta}{(\beta^2 \mu_{12} - \mu_{21}) + i\beta(\mu_{11} + \mu_{22})} = \frac{i s e^{i\beta_0 n\Lambda}}{\frac{\delta}{\Lambda} \sinh(ns\Lambda) - i s \cosh(ns\Lambda)} \quad (5.47)$$

而反射波在 $z = 0$ 边界上的值为

$$A = \frac{(\mu_{21} + \beta^2 \mu_{12}) + i\beta(\mu_{22} - \mu_{11})}{(\beta^2 \mu_{12} - \mu_{21}) + i\beta(\mu_{11} + \mu_{22})} = \frac{i\kappa_c \sinh(ns\Lambda)}{\frac{\delta}{\Lambda} \sinh(ns\Lambda) - i s \cosh(ns\Lambda)} \quad (5.48)$$

以上两式与用耦合模理论所得结果完全一致。

根据式(5.47),可得到如下透射率公式

$$T = BB^* = \frac{s^2}{\left(\frac{\delta}{\Lambda}\right)^2 \sinh^2(ns\Lambda) + s^2 \cosh^2(ns\Lambda)} \quad (5.49)$$

同样,根据式(5.48),可得到如下反射率公式

$$R = AA^* = \frac{\kappa_c^2 \sinh^2(ns\Lambda)}{\left(\frac{\delta}{\Lambda}\right)^2 \sinh^2(ns\Lambda) + s^2 \cosh^2(ns\Lambda)} \quad (5.50)$$

把式(5.49)和(5.50)相加,并利用

$$\kappa_c^2 = s^2 + \left(\frac{\delta}{\Lambda}\right)^2 \quad (5.51)$$

不难得到

$$T + R = 1 \quad (5.52)$$

这里证明了第2章中提到的转移矩阵的单位模性质,其物理意义即能

量守恒。

由式(5.34)和(5.40),可得

$$\frac{\delta}{\Lambda} = \frac{\kappa^2 \Delta w}{2\beta w_{\text{eff}}} - (\beta - \beta_0) \quad (5.53)$$

从式(5.38)可知 s 为极大的条件是

$$\frac{\delta}{\Lambda} = 0 \quad (5.54)$$

这时 $s = \kappa_c$, 于是由式(5.53)得到微扰周期的最佳值

$$\Lambda = \pi \left(\beta - \frac{\kappa^2 \Delta w}{2\beta w_{\text{eff}}} \right)^{-1} \approx \frac{\pi}{\beta} + \frac{\pi \kappa^2 \Delta w}{2\beta^3 w_{\text{eff}}} \quad (5.55)$$

“最佳值”的意义是对于给定的模式,满足式(5.55)的微扰周期能实现最大的反射。

而 $s=0$ 的条件是

$$\kappa_c = \pm \frac{\delta}{\Lambda} \quad (5.56)$$

于是可以求得微扰周期的截止值

$$\Lambda \approx \frac{\pi}{\beta} \left[1 + \frac{(\pi \pm 2) \kappa^2 \Delta w}{2\beta^3 \Lambda w_{\text{eff}}} \right] \quad (5.57)$$

“截止值”的意义是对于给定的模式,微扰周期 Λ 小于上式所确定的值时,将无显著的反射波出现。由此得到, s 不为零时,微扰周期允许的取值范围:

$$\frac{\pi}{\beta} + \frac{(\pi - 2) \kappa^2 \Delta w}{2\beta^3 w_{\text{eff}}} < \Lambda < \frac{\pi}{\beta} + \frac{(\pi + 2) \kappa^2 \Delta w}{2\beta^3 w_{\text{eff}}} \quad (5.58)$$

上式左、右两边第二项分母中的 $\beta\Lambda$ 已用 π 代替,由于这两项是一阶小量。因此,这种替代是允许的。

由于 $\Lambda = \pi/\beta_0$, 从而可得传播常数的禁域:

$$-\frac{\kappa^2 \Delta w}{\pi \beta w_{\text{eff}}} < \beta - (\beta_0 + \frac{\kappa^2 \Delta w}{2\beta w_{\text{eff}}}) < \frac{\kappa^2 \Delta w}{\pi 2\beta w_{\text{eff}}} \quad (5.59)$$

或可写成

$$-\kappa_c < \beta - \left(\beta_0 + \frac{\kappa^2 \Delta \omega}{2\beta \omega_{\text{eff}}} \right) < \kappa_c \quad (5.60)$$

类似于第1章,这里引入有效折射率的概念,并令

$$\frac{\omega_0}{c} N = \beta_0 + \frac{\kappa^2 \Delta \omega}{2\beta \omega_{\text{eff}}} \quad (5.61)$$

这时,

$$\frac{\omega}{c} N \approx \beta \quad (5.62)$$

式中,符号“ \approx ”有两点含义:①光导波的色散是非线性的;② ω 和 ω_0 非常接近,有效折射率可认为近似相等。于是可得

$$-\kappa_c < \frac{\omega - \omega_0}{c} N < \kappa_c \quad (5.63)$$

由式(5.33)、(5.38)、(5.39)和(5.53),可知在周期性皱阶波导中,光导波的传播常数可写成如下形式:

$$\beta' = \beta_0 \pm i s = \beta_0 \pm i \left[\kappa_c^2 - \left(\frac{N}{c} \right)^2 (\omega - \omega_0)^2 \right]^{1/2} \quad (5.64)$$

为讨论方便,式(5.64)两边分别乘以 Λ ,这时有

$$\beta' \Lambda = \pi \pm i \left[(\kappa_c \Lambda)^2 - \left(\Lambda \frac{N}{c} \right)^2 (\omega - \omega_0)^2 \right]^{1/2} \quad (5.65)$$

当 β' 为实数,对应于没有反射损耗的模式,这时有

$$\Delta \omega = |\omega - \omega_0| \geq \frac{c \kappa_c}{N} \quad (5.66)$$

不难看出,频率的禁域范围是

$$\omega_0 - \frac{c \kappa_c}{N} < \omega < \omega_0 + \frac{c \kappa_c}{N} \quad (5.67)$$

因此,禁域的宽度为

$$(\Delta \omega)_{\text{gap}} = \frac{2c \kappa_c}{N} \quad (5.68)$$

在禁域中的 β' 为复数,由式(5.65)可知

$$\text{Im}(\beta' \Lambda) = \left[(\kappa_c \Lambda)^2 - \left(\Lambda \frac{N}{c} \right)^2 (\omega - \omega_0)^2 \right]^{1/2} \quad (5.69)$$

当 $\omega = \omega_0$ 时, 有

$$[\operatorname{Im}(\beta' \Lambda)]_{\max} = \kappa_c \Lambda \quad (5.70)$$

这说明, 当 $\omega = \omega_0$ 时, 衰减系数 s 的极大值等于耦合系数 κ_c 。因此, 一小段周期性波导对布喇格频率 ω_0 附近的光波起一个高反射率的反射镜作用。由式(5.50)可知, 最大反射率为

$$R_{\max} = [\tanh(\kappa_c L)]^2 \quad (5.71)$$

式中 L 为微扰区的长度。显然, 当 $\kappa_c L \gg 1$ 时, $R_{\max} \approx 1$ 。

当 $m=1$ 时, $\beta' \Lambda$ 的实部 $\operatorname{Re}(\beta' \Lambda)$ 和虚部 $\operatorname{Im}(\beta' \Lambda)$ 与 ω 的关系如图 5.4 所示。

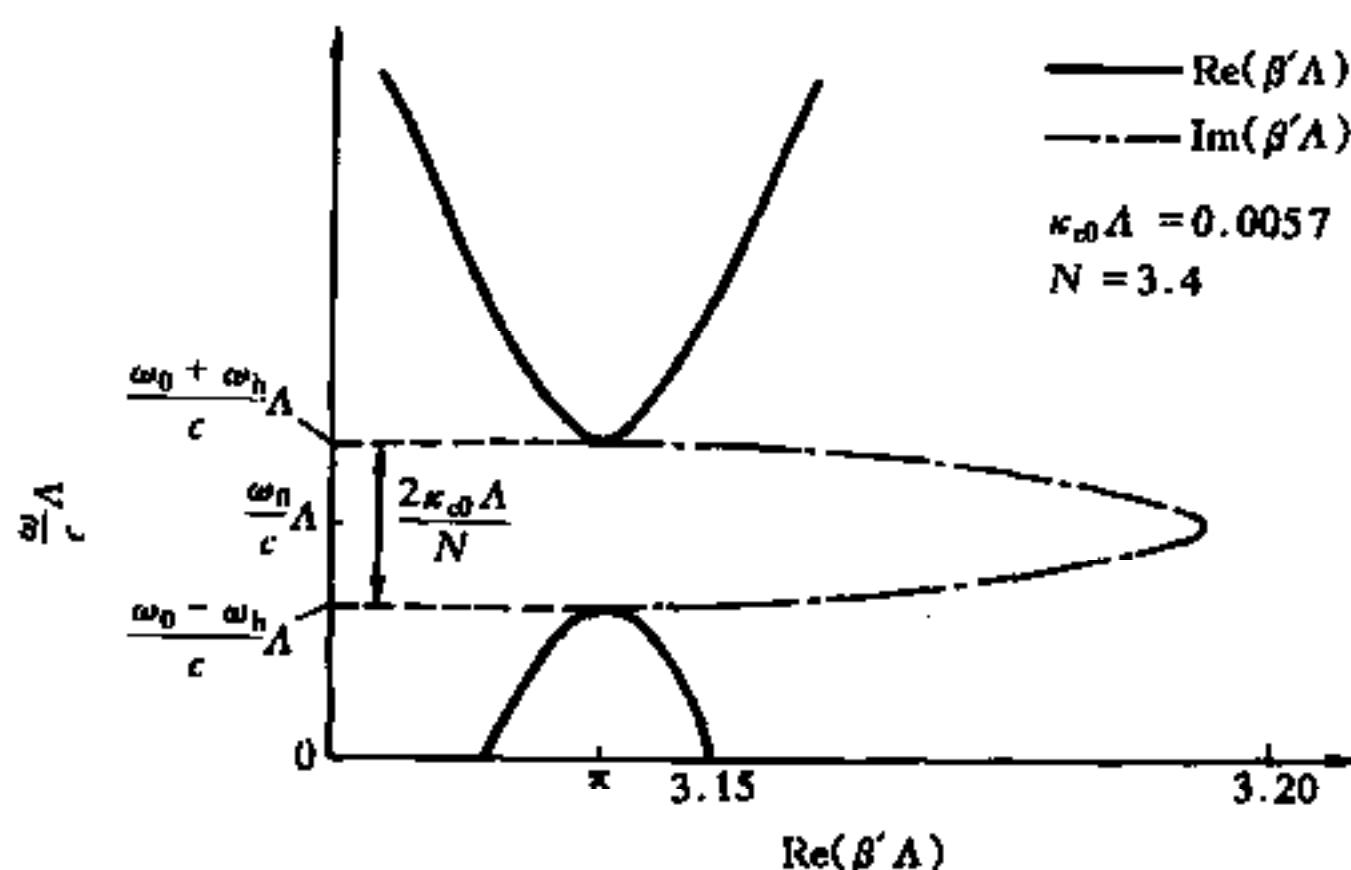


图 5.4 周期性波导模式传播常数 β' 的实部和虚部与频率的关系

5.3 任意形状皱阶周期性波导^[5.3]

上一节用转移矩阵技术分析了矩形皱阶周期性波导。得到了分布反馈系数(耦合系数)的解析公式。本节将把上述方法推广到任意形状皱阶的周期性波导中, 同样可得到极其满意的结果。

5.3.1 分布反馈系数的解析公式

在半导体分布反馈激光器中, 光学反馈是由有源区的周期性波导

表面上的皱阶提供的。反馈分布在整個微扰区以代替镜面反馈,所以把耦合系数称为分布反馈系数。由于周期性波导皱阶的形状有多种,因此,首先需要解决任意形状皱阶周期性波导分布反馈系数的解析求解问题。

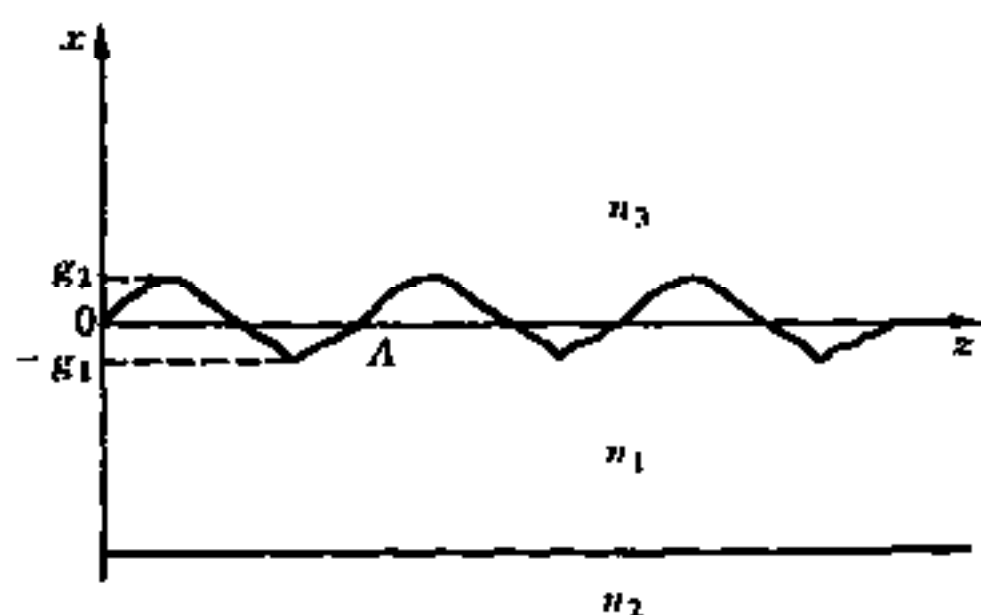


图 5.5 分布反馈激光器中的三层周期性波导结构

考虑如图 5.5 所示的分布反馈激光器中的三层周期性波导结构。适当选择 z 轴位置,使周期性皱阶形状函数 $f(z)$ 满足积分

$$\int_0^{\Lambda} f(z) dz = 0 \quad (5.72)$$

式中 Λ 为微扰周期。

以 z 轴作为非微扰波导的边界,且设非微扰波导的薄膜厚度为 w ,皱阶最高点和最低点的坐标分别为 $x = g_2$ 和 $x = -g_1$,而且满足如下条件:

$$g_1 + g_2 = g \ll w \quad (5.73)$$

把一个微扰周期 Λ 分成 l 等份,每个小区域的宽度都为 a 。设在厚度为 w 的非微扰波导中,TE 波的传播常数为 β ,且有 $\beta\Lambda \approx m\pi$ (m 是整数,这里只讨论 $m=1$ 的情况)。于是,根据上节的分析可知,第 i 个小区域对应的转移矩阵

$$M_i = \begin{bmatrix} \cos(\beta + \Delta\beta_i)a & \frac{1}{\beta + \Delta\beta_i} \sin(\beta + \Delta\beta_i)a \\ -(\beta + \Delta\beta_i) \sin(\beta + \Delta\beta_i)a & \cos(\beta + \Delta\beta_i)a \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

式中

$$\Delta\beta_i = \frac{\kappa^2 f(z_i)}{\beta w_{\text{eff}}} \quad (i = 1, 2, \dots, l) \quad (5.75)$$

由式(5.73)可知, $\Delta\beta_i \ll \beta$ 。

把矩阵 M_i 按小量的阶数展开, 可得

$$M_i = \begin{bmatrix} \cos(\beta a) & \frac{1}{\beta} \sin(\beta a) \\ -\beta \sin(\beta a) & \cos(\beta a) \end{bmatrix} + (\Delta\beta_i a) \begin{bmatrix} -\sin(\beta a) & \frac{1}{\beta} \cos(\beta a) - \frac{1}{\beta^2 a} \sin(\beta a) \\ -\beta \sin(\beta a) & -\sin(\beta a) \end{bmatrix} + (\Delta\beta_i a)^2 \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \cos(\beta a) & \frac{1}{\beta^3 a^2} \sin(\beta a) - \frac{1}{2\beta} \sin(\beta a) - \frac{1}{\beta^2 a} \cos(\beta a) \\ \frac{1}{2} \beta \sin(\beta a) - \frac{1}{a} \cos(\beta a) & -\frac{1}{2} \cos(\beta a) \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

为简单起见, 令式(5.76)右边第一个矩阵为 A , 第二个矩阵为 B , 第三个矩阵为 C , 从而有

$$M_i = A + (\Delta\beta_i a) B + (\Delta\beta_i a)^2 C \quad (5.77)$$

由于一个微扰周期对应的转移矩阵是

$$M(\Lambda) = \underbrace{M_l M_{l-1} \cdots M_2 M_1}_{i \uparrow} \quad (5.78)$$

另外, 由上节的分析可知, 要求出耦合系数, 必须先求出一个微扰周期对应的转移矩阵的迹。为此, 在这里列出关于矩阵迹的两个运算性质, 即

$$\text{tr}(M + N) = \text{tr}(M) + \text{tr}(N) \quad (5.79)$$

$$\text{tr}(MN) = \text{tr}(NM) \quad (5.80)$$

利用以上两个矩阵求迹的性质, 并忽略 $(\Delta\beta_i a)$ 三次以上的高阶无穷小, 则可导出一个微扰周期对应的转移矩阵的迹为

$$\begin{aligned} \text{tr}(M(\Lambda)) = & \text{tr}(A^l) + \text{tr}(BA^{l-1}) \sum_i (\Delta\beta_i a) + \\ & \text{tr}(CA^{l-1}) \sum_i (\Delta\beta_i a)^2 + \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \sum_j \sum_i (\Delta\beta_{ja}) (\Delta\beta_{ia}) \text{tr}(\mathbf{BA}^{j-i-1} \mathbf{BA}^{l-j+i-1})$$

$$(j = 1, 2, \dots, l; i = 1, 2, \dots, l) \quad (5.81)$$

式中, $\text{tr}(\mathbf{A}^l)$ 是所有 l 个小矩阵 M_i 中的第一项相乘, 然后再求迹所得; $\text{tr}(\mathbf{BA}^{l-1}) \sum_i (\Delta\beta_{ia})$ 是 $(l-1)$ 个小矩阵 M_i 中的第一项与剩下的一个小矩阵中的第二项相乘, 再利用矩阵求迹性质并求和所得的结果; 同样 $\text{tr}(\mathbf{CA}^{l-1}) \sum_i (\Delta\beta_{ia})^2$ 是 $(l-1)$ 个小矩阵 M_i 中的第一项与剩下的一个小矩阵中的第三项相乘, 再利用矩阵求迹的性质并求和所得的结果。这里将着重分析式(5.81)中的第四项, 因为这一项对结果的正确与否具有决定性的意义。它是由 $(n-2)$ 个小矩阵 M_i 中的第一项与剩下的两个小矩阵中的第二项相乘。设这两个小矩阵 B 处于任意的 i 和 j 位置, 于是, $(n-2)$ 个矩阵 A 与两个矩阵 B 相乘的排列为

$$\underbrace{\mathbf{AA} \cdots \mathbf{A}}_{(i-1)\uparrow} \mathbf{B} \underbrace{\mathbf{AA} \cdots \mathbf{A}}_{(j-i-1)\uparrow} \mathbf{B} \underbrace{\mathbf{AA} \cdots \mathbf{A}}_{(l-j)\uparrow}$$

根据式(5.80), 求迹时可把处于前面位置的 $(i-1)$ 个 A 矩阵移到末尾, 然后再对 i 和 j 求和。由于在此过程中有重复, 故必须引进系数 $1/2$ 。

下面对式(5.81)中的每一项进行具体计算。根据式(5.23)、(5.24)和(5.25), 可得

$$\text{tr}(\mathbf{A}^l) = 2\cos\beta\Lambda \quad (5.82)$$

另外, 当 $l \rightarrow \infty$ 时, $a \rightarrow 0$, 根据式(5.72)和(5.75), 可得

$$\text{tr}(\mathbf{BA}^{l-1}) \sum_i (\Delta\beta_{ia}) =$$

$$\frac{\kappa^2}{\beta w_{\text{eff}}} \text{tr}(\mathbf{BA}^{l-1}) \int_0^\Lambda f(z) dz = 0 \quad (5.83)$$

对式(5.81)右边第三项, 当 $l \rightarrow \infty$ 时, 同样可写成如下积分形式

$$\text{tr}(\mathbf{CA}^{l-1}) \sum_i (\Delta\beta_{ia})^2 =$$

$$\left(\frac{\kappa^2}{\beta w_{\text{eff}}} \right)^2 \text{tr}(\mathbf{CA}^{l-1}) \cdot a \int_0^\Lambda f^2(z) dz \quad (5.84)$$

因 $a \rightarrow 0$, 故上式也趋于零。

下面考虑式(5.81)右边的第四项,通过矩阵计算,不难求得

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{BA}^{j-i-1}\mathbf{BA}^{l-j+i-1}) = \\ -2\cos(\beta\Lambda) + 2\left(\frac{\sin(\beta a)}{\beta a}\right)^2 \cos[l-2(j-i)]\beta a = \quad (5.85) \\ 2 - 2\cos[2(j-i)]\beta a \end{aligned}$$

在上式的计算过程中,已应用了 $\beta\Lambda \approx \pi$ 的近似和以下极限公式

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin(\beta a)}{\beta a} = 1$$

于是有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_j \sum_i (\Delta\beta_{ja})(\Delta\beta_{ia}) \text{tr}(\mathbf{BA}^{j-i-1}\mathbf{BA}^{l-j+i-1}) = \\ \sum_j \sum_i (\Delta\beta_{ja})(\Delta\beta_{ia}) \{1 - \cos[2(j-i)\beta a]\} \quad (5.86) \end{aligned}$$

为把上述求和运算转换为积分运算,令 $l \rightarrow \infty, a \rightarrow 0$, 并设 $ia = z_1$, $ja = z_2$, 而 $\Delta i = \Delta j = 1$, 则式(5.86)可化为如下形式

$$\begin{aligned} \left(\frac{\kappa^2}{\beta w_{\text{eff}}}\right)^2 \int_0^\Lambda \int_0^\Lambda f(z_1)f(z_2) \{1 - \cos[2\beta(z_2 - z_1)]\} dz_1 dz_2 = \\ - \left(\frac{\kappa^2}{\beta w_{\text{eff}}}\right)^2 \int_0^\Lambda \int_0^\Lambda f(z_1)f(z_2) \cos[2\beta(z_2 - z_1)] dz_1 dz_2 = \\ - \left(\frac{\kappa^2}{\beta w_{\text{eff}}}\right)^2 \int_0^\Lambda \int_0^\Lambda f(z_1)f(z_2) \frac{e^{i2\beta(z_2 - z_1)} - e^{-i2\beta(z_2 - z_1)}}{2} dz_1 dz_2 = \\ - \left(\frac{\kappa^2}{\beta w_{\text{eff}}}\right)^2 \int_0^\Lambda \int_0^\Lambda f(z_1)f(z_2) e^{i2\beta(z_2 - z_1)} dz_1 dz_2 = \\ - \left(\frac{\kappa^2}{\beta w_{\text{eff}}}\right)^2 \left| \int_0^\Lambda f(z) e^{i2\beta z} dz \right|^2 \quad (5.87) \end{aligned}$$

于是可得

$$\begin{aligned} \chi = \frac{1}{2} \text{tr}[\mathbf{M}(\Lambda)]^2 = \\ \cos(\beta\Lambda) - \frac{1}{2} \left| \left(\frac{\kappa^2}{\beta w_{\text{eff}}}\right) \int_0^\Lambda f(z) e^{i2\beta z} dz \right|^2 \quad (5.88) \end{aligned}$$

根据式(5.28)和(5.39),容易得到任意形状皱阶周期性波导的分布反馈系数公式为

$$\kappa_c = \frac{\kappa^2}{\beta \Lambda w_{\text{eff}}} \left| \int_0^\Lambda f(z) e^{i2\beta z} dz \right| \quad (5.89)$$

若以 π 代替 $\beta \Lambda$, 则得

$$\kappa_c = \frac{\kappa^2}{\pi w_{\text{eff}}} \left| \int_0^\Lambda f(z) e^{i2\beta z} dz \right| \quad (5.90)$$

上述积分中的位相因子可以说明所求得的分布反馈系数能够描述前进波与后退波之间的能量交换, 因为后退波所经历的位相变化是入射波的两倍。因此, 式(5.90)具有明确的物理意义。除此之外, 与耦合模理论求得的公式相比较, 存在以下三个明显的差别:

(1) 式(5.90)是一个微扰周期中的纵向积分, 而不是无界空间中的横向积分。

(2) 积分与非微扰波导的横向本征模场无关。

(3) 与耦合系数直接关联的是波导皱阶形状函数, 而不是折射率微扰的傅里叶系数。

由于具有上述特点, 故用这种转移矩阵技术导出的分布反馈系数解析公式十分简洁, 对于具体的皱阶形状函数 $f(z)$, 积分无特别的困难, 容易得到明确的解析公式, 而且一般不需要利用计算机进行数值计算。

5.3.2 典型的周期性皱阶

本小节讨论四种典型的周期性皱阶, 通过积分导出它们的分布反馈系数公式, 并用数值分析与已有的理论进行比较, 结果是令人满意的。

(1) 矩形皱阶 矩形皱阶如图 5.6 所示, 其皱阶形状函数为

$$f(z) = \begin{cases} g_2 & 0 \leq z < t \\ -g_1 & t \leq z < \Lambda \end{cases} \quad (5.91)$$

把式(5.91)代入(5.90), 立即可得

$$\kappa_c = \frac{\kappa^2 g}{\pi \beta w_{\text{eff}}} \sin(\beta t) \quad (5.92)$$

当 $t = \Lambda/2$ 时, 有

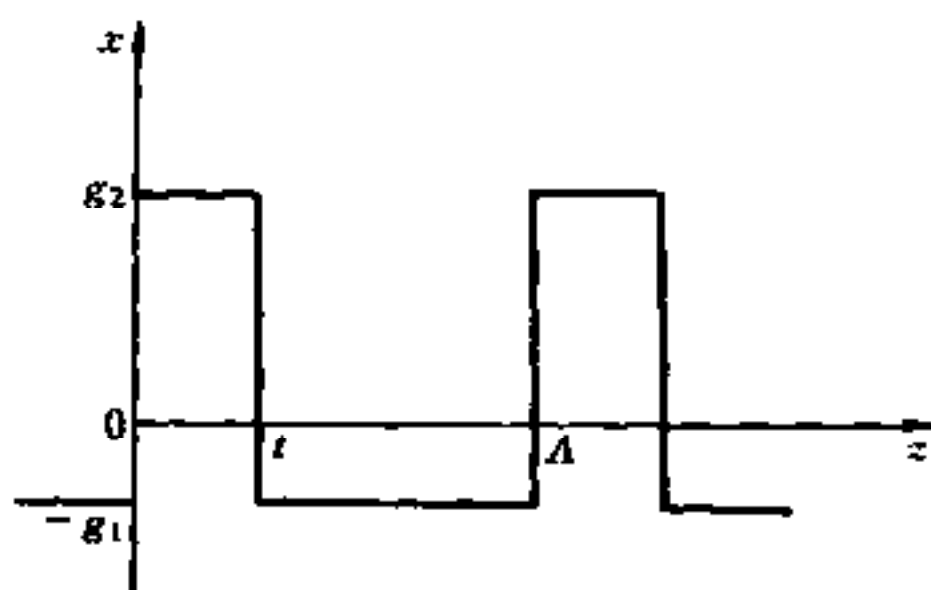


图 5.6 矩形皱阶

$$\kappa_c = \frac{\kappa^2 g}{\pi \beta w_{\text{eff}}} \quad (5.93)$$

考虑到 $\beta\Lambda = \pi$, 式(5.93)与上节的结果式(5.41)是完全一致的。

(2) 正弦形皱阶 正弦形皱阶如图 5.7 所示, 其皱阶形状函数为

$$f(z) = \frac{g}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{\Lambda} z\right) \quad (5.94)$$

把式(5.94)代入(5.90), 可得

$$\kappa_c = \frac{\kappa^2 g}{4\beta w_{\text{eff}}} \quad (5.95)$$

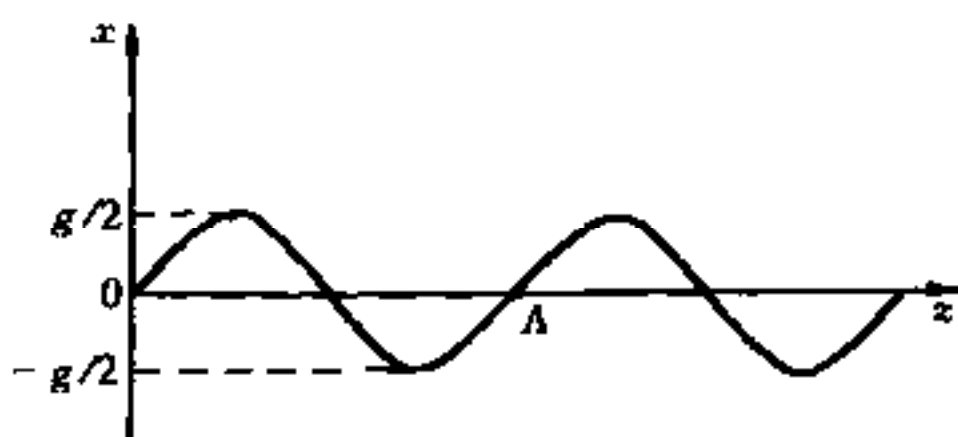


图 5.7 正弦形皱阶

(3) 对称三角形皱阶 对称三角形皱阶如图 5.8 所示, 其皱阶形状函数为

$$f(z) = \begin{cases} \frac{2g}{\Lambda}z & 0 \leq z < \frac{\Lambda}{4} \\ g - \frac{2g}{\Lambda}z & \frac{\Lambda}{4} \leq z < \frac{3\Lambda}{4} \\ \frac{2g}{\Lambda}z - 2g & \frac{3\Lambda}{4} \leq z < \Lambda \end{cases} \quad (5.96)$$

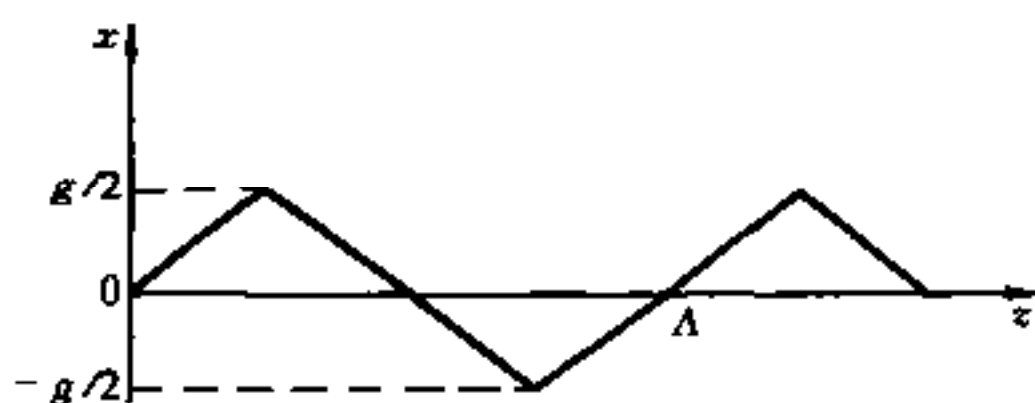


图 5.8 对称三角形皱阶

把式(5.96)代入(5.90),可得

$$\kappa_c = \frac{2\kappa^2 g}{\pi^2 \beta w_{\text{eff}}} \quad (5.97)$$

(4) 锯齿形皱阶 锯齿形皱阶如图 5.9 所示,其皱阶形状函数为

$$f(z) = \frac{g}{\Lambda}z - \frac{g}{2} \quad (5.98)$$

把式(5.98)代入(5.90),可得

$$\kappa_c = \frac{\kappa^2 g}{2\pi \beta w_{\text{eff}}} \quad (5.99)$$

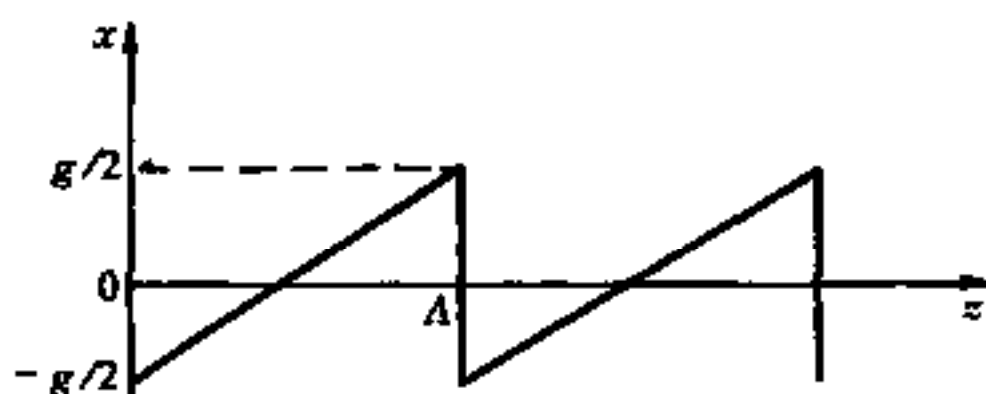


图 5.9 锯齿形皱阶

由以上的讨论可以看出,对于四种典型的周期性皱阶的分布反馈系数,它们的解析公式之间只差一个常数因子。本小节所得结果比耦合模理论导出的公式要简单得多,计算十分方便,而且其物理意义也十

分清楚。

图 5.10 画出了四种典型的周期性皱阶 TE_0 模的分布反馈系数随皱阶高度变化的曲线。图中所用参数如下：

$$n_2 = n_3 = 3.4, n_1 = 3.6, \lambda = 0.85 \mu\text{m}, w = 1 \mu\text{m}.$$

由图可见,矩形皱阶的耦合效率最高,而锯齿形皱阶的耦合效率最低。

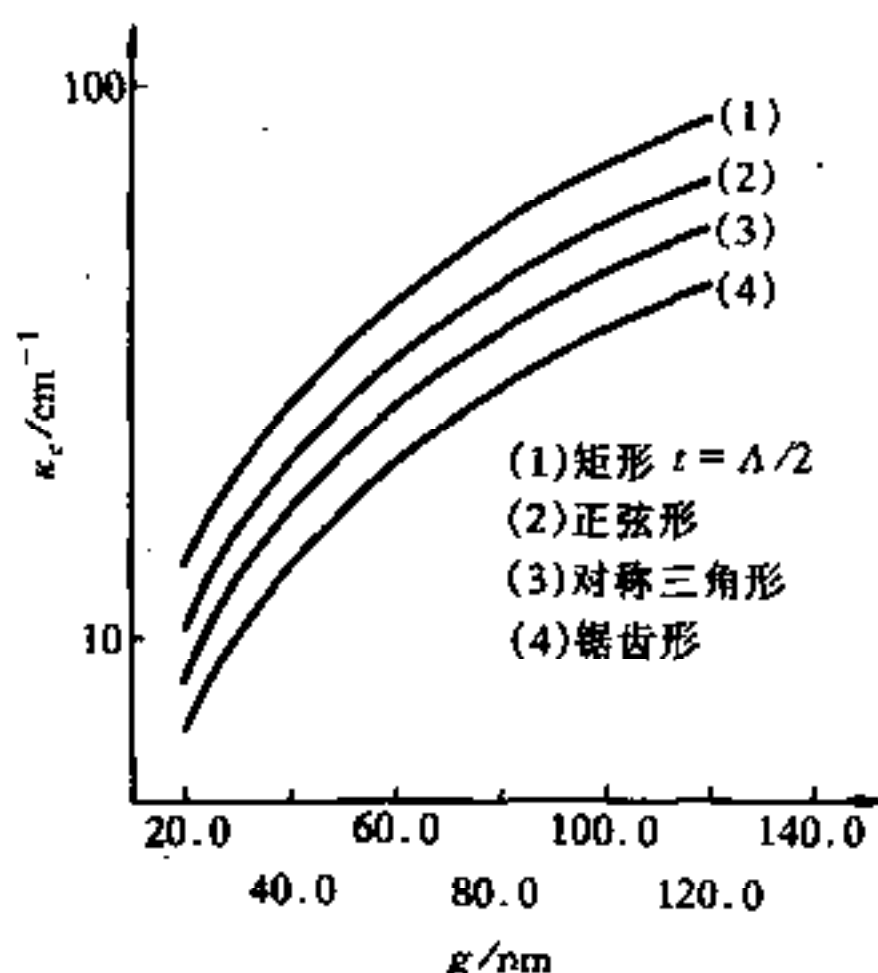


图 5.10 耦合系数随皱阶高度变化的曲线

本节利用转移矩阵理论导出了任意形状皱阶周期性波导的分布反馈系数的解析公式。毋庸置疑,公式的简洁性是十分清楚的。但还不知道这些公式的精确性究竟如何。为了证明理论公式的精确性,一般需要通过实验验证,也可以与他人的理论结果相比较。这里以耦合模理论(文献[5.4])以及改进的耦合模理论(文献[5.5])作为比较对象,用数值计算方法画出了耦合模理论、改进的耦合模理论以及转移矩阵理论给出的数值曲线,如图 5.11 所示。

从曲线图可以看出,由本节转移矩阵理论所得的曲线介于由不同的耦合模理论所得的两条曲线之间。由于文献[5.4]所得的结果是偏大的^[5.6],而文献[5.5]的结果是对文献[5.4]所得结果的改进,因而可以断言,由转移矩阵理论所得到的结果,其精确度高于由耦合模理论(文献[5.4])所得到的结果。

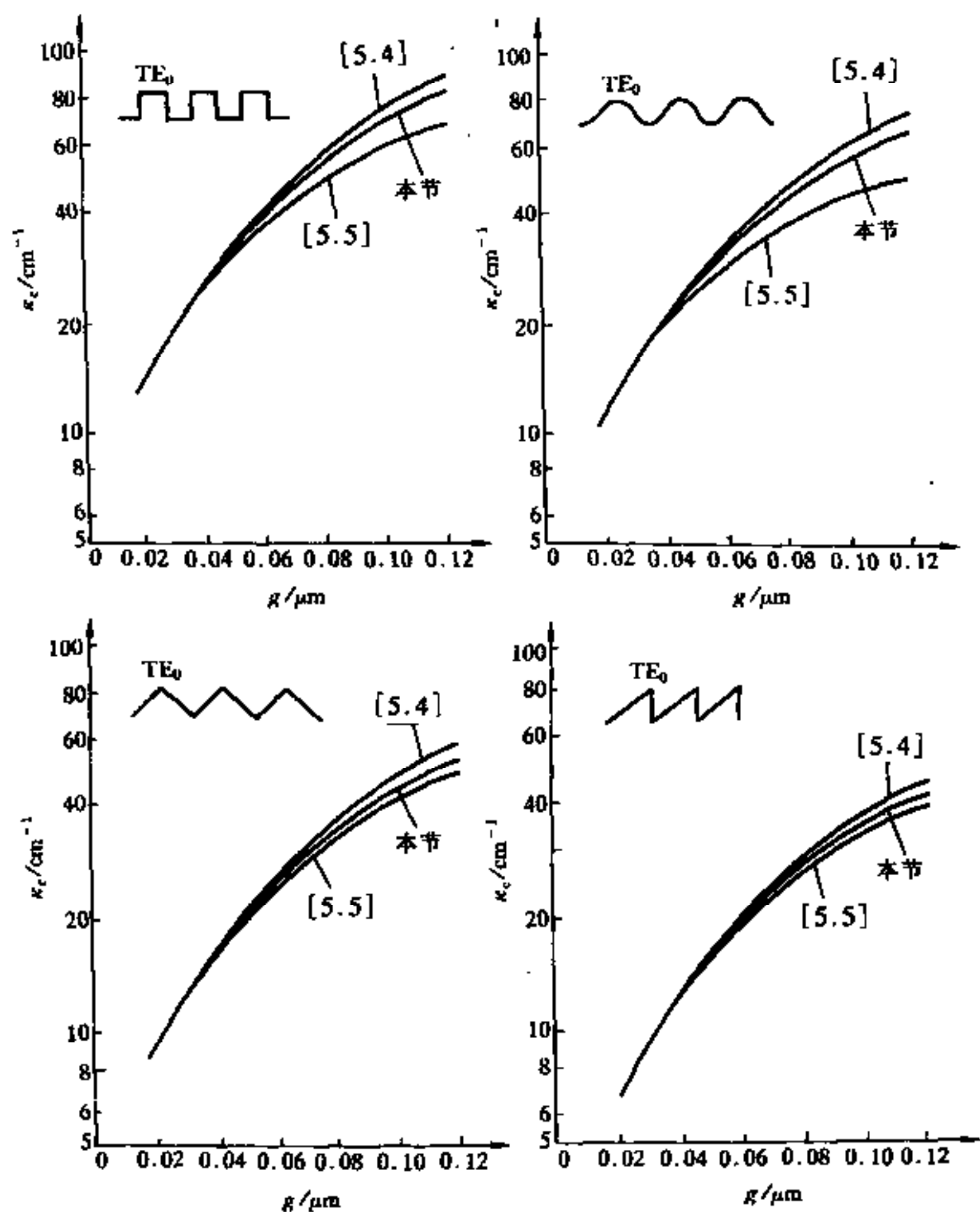


图 5.11 耦合系数随皱阶高度变化的曲线

参考文献

- [5.1] A. Yariv. IEEE J. Quant. Electron., 1973, 9(9): 919~933.

- [5.2] 曹庄琪, 方俊鑫. 应用科学学报, 1984, 2(1): 15~22.
- [5.3] 曹庄琪, 方俊鑫. 应用科学学报, 1986, 4(1): 36~42.
- [5.4] W. Streifer, D. R. Scifres, R. D. Burnham. IEEE J. Quant. Electron., 1975, 11(11): 867~873.
- [5.5] Y. Yamamoto, T. Kamiya, H. Yanai. IEEE J. Quant. Electron, 1978, 14(4): 245~259.
- [5.6] W. Streifer, D. R. Scifres, R. D. Burnham, et al. IEEE J. Quant. Electron., 1977, 13(1): 67~68.

第 6 章 多量子阱光波导

6.1 引言

随着先进的分子束外延 (MBE) 和金属有机化学气相沉积 (MOCVD) 生长技术的发展。由 III-V 族半导体复合材料构成的单量子阱和多量子阱结构已引起广泛的重视。由于组成这类结构的薄膜仅有几个原子层厚度, 它的物理线度已可与确定电子行为的特征长度 (包括德波罗意波长, 玻尔半径和平均自由程等) 相比较, 因此, 薄膜的存在极大地影响了电子的运动, 从而导致一系列对光通信和光信息处理等高速器件极有应用潜力的电子性质。多量子阱光波导已在光学双稳器件、量子斯塔克 (Stark) 调制器、多量子阱激光器等领域获得广泛的应用。本章仍然利用转移矩阵这一有效的数学工具, 首先分析阶跃折射率分布多量子阱光波导的色散特性, 得到了合理的等效折射率公式。在此基础上, 采用薄膜近似, 对一个周期的转移矩阵进行了分解, 求出了一个周期转移矩阵的迹, 从而得到了任意折射率分布多量子阱光波导的等效折射率。进一步的工作是求一个周期的转移矩阵本身, 获得了非等效折射率近似多量子阱光波导的色散方程。最后讨论了分层复合材料结构中的非线性二次增强效应。

6.2 阶跃折射率分布多量子阱光波导

6.2.1 无限扩展周期性多层薄膜中的等效介电系数^[6.1]

考虑图 6.1 所示的无限扩展的周期性多层薄膜, 这种结构是由介电系数分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 的两种介质周期性地交替排列构成的。设两种基膜的厚度分别为 h_1 和 h_2 , 则一个周期 (基) 的长度 $\Lambda = h_1 + h_2$ 。对半导体多量子阱或超晶格, 基膜的厚度通常为几个原子层的厚度。根

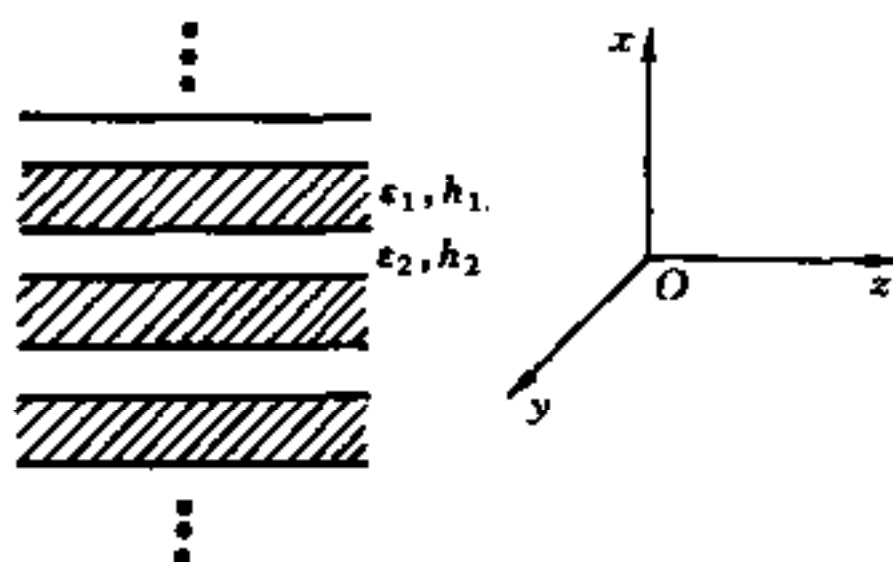


图 6.1 无限扩展的周期性多层薄膜

据对称性分析,预计这类结构的介电张量与单轴晶体具有相同的形式。即有, $\epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon_{\perp}$; $\epsilon_x = \epsilon_{//}$, (x 沿光轴方向)。于是,电位移矢量在 y (或 z) 方向的分量在一个周期中的平均值为

$$\bar{D}_y = \frac{1}{h_1 + h_2} (\epsilon_1 E_y^{(1)} h_1 + \epsilon_2 E_y^{(2)} h_2) \quad (6.1)$$

式中, $E_y^{(1)}$ 和 $E_y^{(2)}$ 分别是介质 1 和介质 2 中电场强度的 y 分量。由于 $E_y^{(1)}$ 和 $E_y^{(2)}$ 在界面上是连续的, 而且有 $h_{1,2} \ll \lambda$ (λ 是光波长), 故可忽略电场强度在薄膜层内的变化, 因此有

$$E_y^{(1)} = E_y^{(2)} = \bar{E}_y \quad (6.2)$$

式中 \bar{E}_y 是电场强度在一个周期中的平均值, 由

$$\bar{D}_y = \epsilon_{\perp} \bar{E}_y$$

可得

$$\epsilon_{\perp} = \frac{\epsilon_1 h_1 + \epsilon_2 h_2}{h_1 + h_2} \quad (6.3)$$

类似地, 电场强度在 x 方向的分量 E_x 在一个周期中的平均值为

$$\bar{E}_x = \frac{1}{h_1 + h_2} \left(\frac{D_x^{(1)}}{\epsilon_1} h_1 + \frac{D_x^{(2)}}{\epsilon_2} h_2 \right) \quad (6.4)$$

由 D_x 在界面上法向连续的性质, 并忽略薄膜层内 D_x 的变化, 可得

$$D_x^{(1)} = D_x^{(2)} = D_x \quad (6.5)$$

再由

$$E_x = \epsilon_{//}^{-1} D_x$$

可得

$$\frac{1}{\epsilon_{//}} = \frac{1}{h_1 + h_2} \left(\frac{h_1}{\epsilon_1} + \frac{h_2}{\epsilon_2} \right) \quad (6.6)$$

式(6.3)和(6.6)即为 TE 和 TM 两种偏振态下无限扩展周期性多层薄膜的等效介电系数公式,从上述分析容易看出,这种结构与单轴晶体类似,具有双折射性质, ϵ_{\perp} 对应 o 光的介电系数,而 $\epsilon_{//}$ 对应 e 光的介电系数。

6.2.2 多量子阱波导的等效折射率

多量子阱光波导与无限扩展周期性多层薄膜是两种不同的结构。但长期以来,在处理多量子阱光波导问题时,其等效折射率往往用式(6.3)和(6.6)代替^[6.2]。这种替代可作为一种近似,但从理论上分析,显然是不科学的。近年来,Ohke^{[6.3][6.4]}和 Skinner^[6.5]等人试图从不同的路径解决这个问题,但他们采用的方法只能得到多量子阱光波导芯子区域 TE 波的等效折射率公式,而对 TM 波是无效的。本节利用处理晶格周期势电子行为的 Floquet 定理和转移矩阵理论,在薄膜近似下,首次导出了多量子阱光波导在 TE 和 TM 两种偏振态下的等效折射率公式,并解释了多量子阱光波导的本征双折射性质^[6.6]。

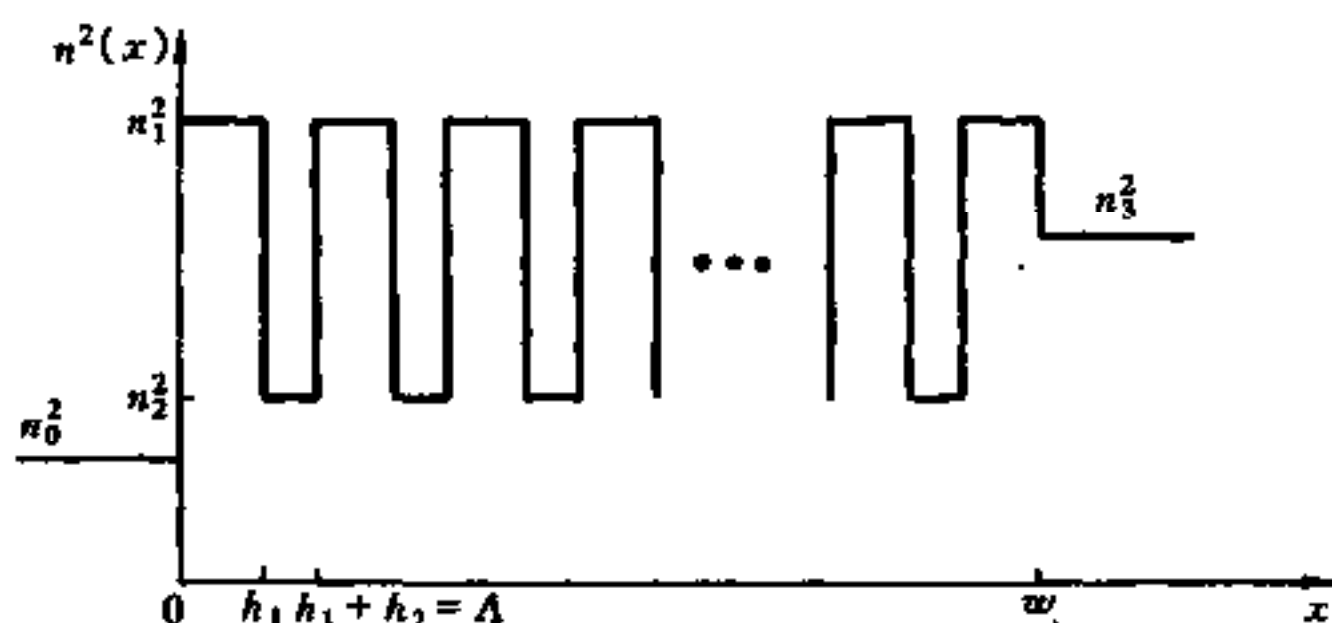


图 6.2 阶跃折射率分布多量子阱光波导

考虑图 6.2 所示的多量子阱光波导的折射率分布与坐标选择,为方便起见,图中用折射率的平方代替折射率。设折射率为 n_1 的薄膜

厚度为 h_1 , 而折射率为 n_2 的薄膜厚度为 h_2 , 周期 $\Lambda = h_1 + h_2$, 整个量子阱区域的厚度为

$$w = N\Lambda + h_1 \quad (6.7)$$

式中, N 是量子阱区域的周期数。图中 n_0 和 n_3 分别为波导覆盖层和衬底的折射率。不失一般性, 假定

$$n_1 > n_3 > n_2 > n_0 \quad (6.8)$$

则由介质平板波导的电磁理论可知, 在覆盖层和衬底中, 电磁场呈指数衰减的形式, 设这两个区域的指数衰减系数分别为 q 和 p 。在厚度为 h_1 的基膜中, 应是两个相反方向振荡场的叠加; 而在厚度为 h_2 的基膜中, 根据式(6.8), 可知是两个相反方向指数衰减场的叠加。振荡场和指数衰减场的特征参数设为 κ 和 α 。容易知道, 以上四个特征参量可由下式定义

$$\left. \begin{aligned} q &= (\beta^2 - k_0^2 n_0^2)^{1/2} \\ p &= (\beta^2 - k_0^2 n_3^2)^{1/2} \\ \kappa &= (k_0^2 n_1^2 - \beta^2)^{1/2} \\ \alpha &= (\beta^2 - k_0^2 n_2^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

根据转移矩阵理论, 厚度为 h_1 的薄膜对应的转移矩阵为

$$M(h_1) = \begin{bmatrix} \cos(\kappa h_1) & -\frac{f_1}{\kappa} \sin(\kappa h_1) \\ \frac{\kappa}{f_1} \sin(\kappa h_1) & \cos(\kappa h_1) \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

对于厚度为 h_2 的薄膜, 由于该薄膜中的场是指数衰减型的, 则在该薄膜对应的转移矩阵中, 特征参量应是 $i\alpha$, 则由第 2 章所述, 有

$$M(h_2) = \begin{bmatrix} \cosh(\alpha h_2) & -\frac{f_2}{\alpha} \sinh(\alpha h_2) \\ -\frac{\alpha}{f_2} \sinh(\alpha h_2) & \cosh(\alpha h_2) \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

式中

$$f_j = \begin{cases} 1 & \text{TE 模} \\ n_j^2 & \text{TM 模} \end{cases} \quad (j = 0, 1, 2, 3) \quad (6.12)$$

根据式(6.10)和(6.11)定义的矩阵的形式,可知一个周期 Λ 对应的转移矩阵应为

$$M(\Lambda) = M(h_1) \cdot M(h_2) \quad (6.13)$$

记为

$$M(\Lambda) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

式中

$$m_{11} = \cos(\kappa h_1) \cosh(\alpha h_2) + \frac{\alpha f_1}{\kappa f_2} \sin(\kappa h_1) \sinh(\alpha h_2) \quad (6.15)$$

$$m_{12} = -\frac{f_1}{\kappa} \sin(\kappa h_1) \cosh(\alpha h_2) - \frac{f_2}{\alpha} \cos(\kappa h_1) \sinh(\alpha h_2) \quad (6.16)$$

$$m_{21} = \frac{\kappa}{f_1} \sin(\kappa h_1) \cosh(\alpha h_2) - \frac{\alpha}{f_2} \cos(\kappa h_1) \sinh(\alpha h_2) \quad (6.17)$$

$$m_{22} = \cos(\kappa h_1) \cosh(\alpha h_2) - \frac{\kappa f_2}{\alpha f_1} \sin(\kappa h_1) \sinh(\alpha h_2) \quad (6.18)$$

按照 Floquet 定理,在周期性介质中传播波数 K 应满足关系

$$\cos(K\Lambda) = \frac{1}{2} \text{tr}[M(\Lambda)] \quad (6.19)$$

根据式(6.15)和(6.18),可得

$$\begin{aligned} \cos(K\Lambda) &= \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22}) = \\ &= \cos(\kappa h_1) \cosh(\alpha h_2) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha f_1}{\kappa f_2} - \frac{\kappa f_2}{\alpha f_1} \right) \sin(\kappa h_1) \sinh(\alpha h_2) \end{aligned} \quad (6.20)$$

Bloch 波的波数

$$K = (k_0^2 n_e^2 - \beta^2)^{1/2} \quad (6.21)$$

式中 n_e 显然是多量子阱光波导芯子层的等效折射率。

在典型的多量子阱波导中,芯子层约有五十到几百个周期数,而芯子层的厚度仅为 μm 量级,因此周期长度 Λ 一般在 10nm 左右,显然满足 $h_{1,2} \ll \lambda$ (λ 是光波长)的条件。另外,特征参量 K , κ 和 α 均为波长倒数的量级。因此,可把式(6.20)中的正弦、余弦、双曲正弦和双曲余

弦函数作级数展开,在只取二阶小量的近似下,可得

$$1 - \frac{1}{2}(KA)^2 = \left[1 - \frac{1}{2}(\kappa h_1)^2\right] \left[1 + \frac{1}{2}(\alpha h_2)^2\right] + \frac{1}{2}h_1h_2 \frac{\alpha^2 f_1^2 - \kappa^2 f_2^2}{f_1 f_2} \quad (6.22)$$

利用式(6.9)和(6.21),由式(6.22)可得多量子阱波导芯子层的等效折射率公式

$$n_e^2 = \frac{n_1^2 h_1 + n_2^2 h_2}{h_1 + h_2} - \frac{h_1 h_2}{(h_1 + h_2)^2} \cdot \frac{(f_1 - f_2)^2}{f_1 f_2} (\beta/k_0)^2 \quad (6.23)$$

于是,多量子阱光波导的芯子层可看作为折射率为 n_e 的单层薄膜,多量子阱光波导可看作为一个简单的三层介质平板波导。若定义

$$f_e = \begin{cases} 1 & \text{TE 模} \\ n_e^2 & \text{TM 模} \end{cases} \quad (6.24)$$

则多量子阱光波导芯子层对应的转移矩阵为

$$M(w) = \begin{bmatrix} \cos(Kw) & -\frac{f_e}{K} \sin(Kw) \\ \frac{K}{f_e} \sin(Kw) & \cos(Kw) \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

于是,由式(2.51)和(2.52),可得多量子阱光波导的色散方程

$$\begin{bmatrix} -\frac{p}{f_3} & 1 \end{bmatrix} M(w) \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{q}{f_0} \end{bmatrix} = 0 \quad (6.26)$$

化简上式,得到

$$\left(\frac{K^2}{f_e^2} - \frac{pq}{f_0 f_3}\right) \tan(Kw) = \frac{K}{f_e} \left(\frac{p}{f_3} + \frac{q}{f_0}\right) \quad (6.27)$$

结合式(6.23)和(6.21),超越方程(6.27)完全可确定多量子阱光波导两种偏振状态下的传播模式和色散特性。

为深入了解多量子阱光波导的特性,下面对式(6.23)作进一步的分析。

① 对 TE 模,根据式(6.12),可得多量子阱光波导芯子层 TE 模的

等效折射率公式

$$(n_e^{\text{TE}})^2 = \frac{n_1^2 h_1 + n_2^2 h_2}{h_1 + h_2} \quad (6.28)$$

上式与无限扩展周期性多层薄膜中的等效介电系数公式(6.3)是完全一致的。这个结论是可信的,因为对 TE 模式,电场矢在薄膜内偏振,波导边界对电场矢的偏振没有影响。因此对多量子阱光波导和无限扩展周期性多层薄膜两种不同的结构。TE 模的等效折射率是相同的。

② 对 TM 模,利用式(6.12),可得多量子阱光波导芯子层 TM 模的等效折射率公式

$$(n_e^{\text{TM}})^2 = \frac{n_1^2 h_1 + n_2^2 h_2}{h_1 + h_2} - \frac{h_1 h_2}{(h_1 + h_2)^2} \cdot \frac{(n_1^2 - n_2^2)^2}{n_1^2 n_2^2} (\beta/k_0)^2 \quad (6.29)$$

由上式可见, TM 模的等效折射率不再是常数,而与光波导的特征参数——有效折射率 (β/k_0) 密切相关。曾有人^[6.3]对此结论极不理解,企图修改式(6.29),从而扼杀了几乎已经到手的成果。实际上,根据第 1 章的分析, TM 模有一个电场分量 (E_x) 在垂直于波导界面方向上偏振,不同的边界显然会对这个电场矢施加不同的作用。因此, TM 模的等效折射率与波导特征参量有关,是一个完全合理的结果。

③ 当 $w \rightarrow \infty$ 时,多量子阱光波导退化为无限扩展的周期性多层薄膜结构。根据第 1 章的分析,当三层平板波导的芯子层厚度变大时,波导的有效折射率随之增加。有效折射率的极限为芯子层的折射率。因此,当多量子阱光波导芯子层厚度增加时,其有效折射率 (β/k_0) 随之增加。当 w 趋于无穷大时,有

$$\beta/k_0 \rightarrow (n_e^{\text{TM}})_\infty \quad (6.30)$$

下标“ ∞ ”表示波导芯子层厚度为无穷大,这时, $(n_e^{\text{TM}})_\infty$ 即为无限扩展周期性多层薄膜 TM 模的等效折射率,再把式(6.30)代入(6.29),并注意到式(6.29)左边的 n_e^{TM} 已变为 $(n_e^{\text{TM}})_\infty$,于是可得

$$(n_e^{\text{TM}})_\infty^2 = \frac{h_1 + h_2}{\frac{h_1}{n_1^2} + \frac{h_2}{n_2^2}} \quad (6.31)$$

此公式与式(6.6)完全一致。这说明式(6.29)表示的等效折射率公式是完全正确的。

④ 若两基膜的折射率相等,即 $n_1 = n_2$,则多量子阱光波导退化为简单的三层平板波导。这时,式(6.29)变为

$$n_e^{\text{TM}} = n_e^{\text{TE}} \quad (6.32)$$

这是预料中的结果。因为对简单三层平板波导,芯子层的折射率永远是常数,与光的偏振态无关。

⑤ 若 $n_1 \neq n_2$,则由式(6.29)容易看出永远有

$$n_e^{\text{TM}} \neq n_e^{\text{TE}} \quad (6.33)$$

这是多量子阱光波导不同于简单三层平板波导的一个特征性质。这个不等式是多量子阱光波导具有本征双折射的根本原因。

⑥ 选择多量子阱光波导的衬底折射率 n_3 ,使它满足以下条件,即

$$n_e^{\text{TM}} < n_3 < n_e^{\text{TE}} \quad (6.34)$$

则该多量子阱光波导成为一个只能容纳 TE 模的单偏振结构。式(6.34)为设计一种新的光波导偏振器提供了有效的理论指导。

6.3 任意折射率分布多量子阱光波导

上节分析了简单的阶跃折射率分布多量子阱光波导的特性。但对实际的多量子阱光波导,由于制备过程中的各类热效应,例如热生长和退火等过程,多量子阱光波导的折射率分布往往不是阶跃形的。为解决此类问题,本节处理最一般的任意折射率分布多量子阱光波导,并采用等效折射率和非等效折射率两种近似的分析,都取得了良好的结果。

6.3.1 等效折射率方法^[6.7]

考虑图 6.3 所示的任意折射率分布多量子阱光波导,设光沿 z 方向传播。假如量子阱—垒的周期为 Λ ,多量子阱区域的厚度为 w ,其中包括 N 个整周期数。图中 n_0 和 n_3 分别为覆盖层和衬底的折射率,而 n_1 和 n_2 分别为多量子阱光波导芯子层区域折射率分布的极大值

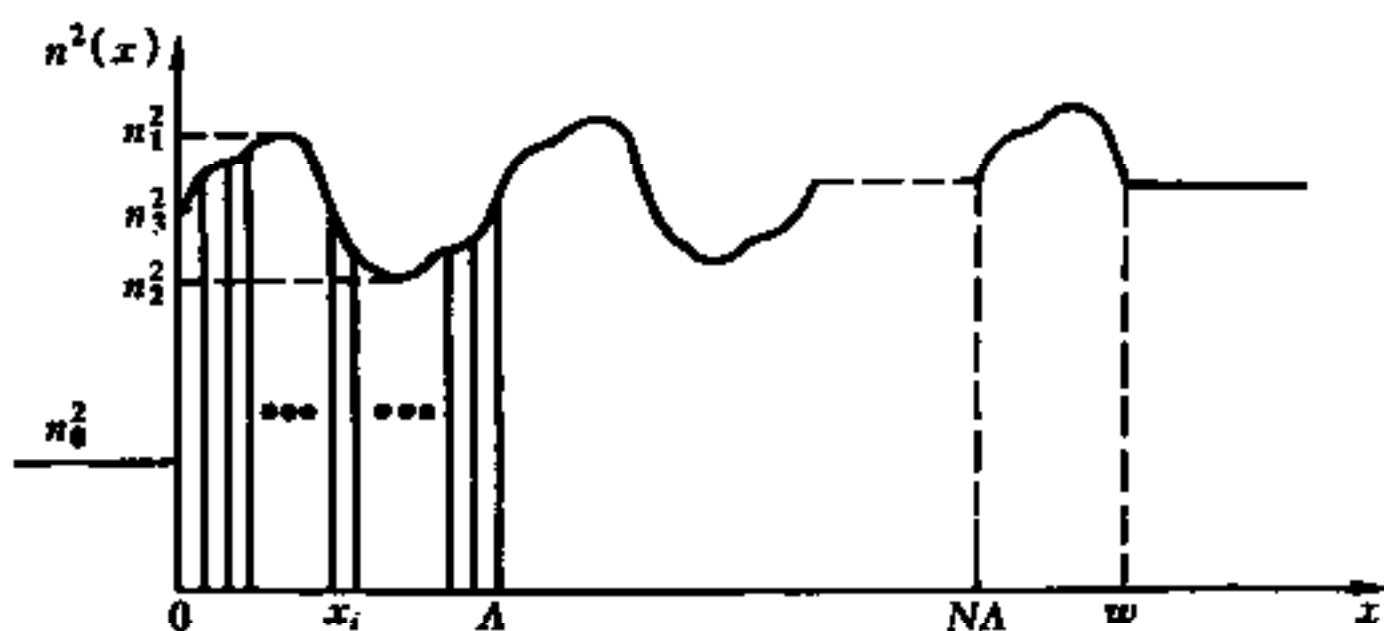


图 6.3 任意折射率分布多量子阱光波导

和极小值, $n(x)$ 为一个周期的折射率分布函数, 且满足周期性条件

$$n(x + \Lambda) = n(x) \quad (6.35)$$

不失一般性, 假定

$$n_1 > n_3 > n_2 > n_0 \quad (6.36)$$

为利用转移矩阵理论, 可把周期 Λ 分成 l 等分, 设每个小区域的厚度为 h , 则有 $x_l = lh = \Lambda$ 。一般地, 对应第 i 个小区域的转移矩阵可写为

$$M_i = \begin{bmatrix} \cos(\kappa_i h) & -\frac{f_i}{\kappa_i} \sin(\kappa_i h) \\ \frac{\kappa_i}{f_i} \sin(\kappa_i h) & \cos(\kappa_i h) \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, l) \quad (6.37)$$

式中

$$f_i = \begin{cases} 1 & \text{TE 模} \\ n^2(x_i) & \text{TM 模} \end{cases} \quad (6.38)$$

$$\kappa_i = [k_0^2 n^2(x_i) - \beta^2]^{1/2} \quad (6.39)$$

显然, κ_i 是 x 的函数, 而且既可是实数, 又可变为虚数。当 $k_0 n(x_i) > \beta$ 时, 第 i 个小区域中的场呈振荡形式, 从而有如式 (6.37) 实矩阵形式。而对 $\beta > k_0 n(x_i)$, 应导致指数衰减形式的解。这时只要用 $i\alpha$ 代替 κ , 并利用下列恒等式

$$\cos(i\alpha h) = \cosh(\alpha h)$$

$$\sin(i\alpha h) = i \sinh(\alpha h)$$

则式 (6.37) 仍然成立。

在 $N \gg 1$ 情况下, Λ 通常约为 10nm 的数量级, 而当 $l \rightarrow \infty$ 时, 有 $h \rightarrow 0$, 故必满足条件

$$\kappa_i h \ll 1 \quad (6.40)$$

因此可采用薄膜近似, 用级数展开矩阵 M_i 中正弦和余弦函数, 在保留二阶小量而忽略三阶和三阶以上小量的情况下, 式(6.37)可改写成

$$M_i = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}(\kappa_i h)^2 & -f_i h \\ \frac{\kappa_i^2}{f_i} h & 1 - \frac{1}{2}(\kappa_i h)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - f_i h \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\kappa_i^2}{f_i} h \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}(\kappa_i h)^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

显然, 上式右边第一项是主项, 第二、三两项则是一阶小量, 而第四项为二阶小量。为方便起见, 记

$$M_i = E - (f_i h) A + \left(\frac{\kappa_i^2}{f_i} h \right) B - \frac{1}{2}(\kappa_i h)^2 E \quad (6.42)$$

式中, E 为单位矩阵; A 、 B 均为仅有一个单位矩阵元的简单矩阵, 即

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

一个周期 Λ 对应的转移矩阵是 l 个 $M_i (i=1, 2, \dots, l)$ 矩阵依次相乘的积, 即有

$$M(\Lambda) = M_1 M_2 \cdots M_{l-1} M_l \quad (6.43)$$

已知两矩阵 M 、 N 相加和相乘满足以下求迹法则:

$$\text{tr}(M + N) = \text{tr}(M) + \text{tr}(N)$$

$$\text{tr}(MN) = \text{tr}(NM)$$

把式(6.42)代入(6.43), 并利用上述矩阵求迹法则, 在忽略三阶以上小量情况下, 一个周期 Λ 对应的转移矩阵的迹由下式表示:

$$\text{tr}[M(\Lambda)] = \text{tr}(E^l) - \sum_i f_i h \text{tr}(E^{l-1} A) +$$

$$\begin{aligned}
& \sum_i \left(\frac{\kappa_i^2}{f_i} h \right) \text{tr}(\mathbf{E}^{l-1} \mathbf{B}) - \frac{1}{2} \sum_i (\kappa_i h)^2 \text{tr}(\mathbf{E}^l) + \\
& \frac{1}{2} \sum_{\{i \neq j\}} \sum (f_i h)(f_j h) \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{E}^{j-i-1} \mathbf{A} \mathbf{E}^{l-j+i-1}) + \\
& \frac{1}{2} \sum_{\{i \neq j\}} \sum \left(\frac{\kappa_i^2}{f_i} h \right) \left(\frac{\kappa_j^2}{f_j} h \right) \text{tr}(\mathbf{B} \mathbf{E}^{j-i-1} \mathbf{B} \mathbf{E}^{l-j+i-1}) - \\
& \sum_{\{i \neq j\}} \sum (f_i h) \left(\frac{\kappa_j^2}{f_j} h \right) \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{E}^{j-i-1} \mathbf{B} \mathbf{E}^{l-j+i-1}) \quad (6.44)
\end{aligned}$$

式中,右边第一项是 l 个 M_i 矩阵中的第一项相乘并求迹所得结果;第二、三、四项分别是 $(l-1)$ 个 M_i 矩阵中的第一项与剩下的一个 M_i 矩阵中的第二、三、四项相乘并对 i 求和再求迹所得;第五项是 $(l-2)$ 个 M_i 矩阵中的第一项与剩下的两个 M_i 矩阵中的第二项相乘并对 i, j 求和再求迹之结果;第六项的意义与第五项类似,它是 $(l-2)$ 个 M_i 矩阵中的第一项与剩下的两个 M_i 矩阵中的第三项相乘并对 i, j 求和再求迹所得;第七项是 $(l-2)$ 个 M_i 矩阵中的第一项与剩下的两个 M_i 矩阵中的第二和第三两项相乘并对 i, j 求和再求迹的形式,第五、六两项前的系数 $1/2$ 是由重复求和所引起。

下面对式(6.44)右边的每一项进行分析计算。根据单位矩阵 \mathbf{E} 和两个特殊矩阵 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 的性质,容易看出

$$\begin{aligned}
\text{tr}(\mathbf{E}^l) &= \text{tr}(\mathbf{E}) = 2 \\
\text{tr}(\mathbf{E}^{l-1} \mathbf{A}) &= \text{tr}(\mathbf{A}) = 0 \\
\text{tr}(\mathbf{E}^{l-1} \mathbf{B}) &= \text{tr}(\mathbf{B}) = 0 \\
\text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{E}^{j-i-1} \mathbf{A} \mathbf{E}^{l-j+i-1}) &= \text{tr}(\mathbf{A}^2) = 0 \\
\text{tr}(\mathbf{B} \mathbf{E}^{j-i-1} \mathbf{B} \mathbf{E}^{l-j+i-1}) &= \text{tr}(\mathbf{B}^2) = 0 \\
\text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{E}^{j-i-1} \mathbf{B} \mathbf{E}^{l-j+i-1}) &= \text{tr}(\mathbf{AB}) = 1
\end{aligned}$$

利用上述结果,式(6.44)变为

$$\text{tr}[M(\Lambda)] = 2 - \sum_i (\kappa_i h)^2 - \sum_{\{i \neq j\}} \sum (f_i h) \left(\frac{\kappa_j^2}{f_j} h \right) \quad (6.45)$$

式中右边的第二项和第三项分别是一个方阵的对角项和非对角项之和,为说明此问题,以 $l=3$ 为例,列出这个方阵:

$$\begin{bmatrix} f_1 h \frac{\kappa_1^2}{f_1} h & f_1 h \frac{\kappa_2^2}{f_2} h & f_1 h \frac{\kappa_3^2}{f_3} h \\ f_2 h \frac{\kappa_1^2}{f_1} h & f_2 h \frac{\kappa_2^2}{f_2} h & f_2 h \frac{\kappa_3^2}{f_3} h \\ f_3 h \frac{\kappa_1^2}{f_1} h & f_3 h \frac{\kappa_2^2}{f_2} h & f_3 h \frac{\kappa_3^2}{f_3} h \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

容易看出,当 $l \rightarrow \infty$ 时, $h \rightarrow 0$, 方阵中每一项之和正好构成一个二重积分。利用式(6.38)和(6.39),可得到以下结果:

对 TE 模

$$\begin{aligned} \sum_i (\kappa_i h)^2 + \sum_{i \neq j} \sum_j (f_j h) \left(\frac{\kappa_i^2}{f_j} h \right) = \\ \int_0^\Lambda dx \int_0^\Lambda [k_0^2 n^2(x) - \beta^2] dx = \\ k_0 \Lambda \int_0^\Lambda n^2(x) dx - \beta^2 \Lambda \end{aligned} \quad (6.47)$$

对 TM 模

$$\begin{aligned} \sum_i (\kappa_i h)^2 + \sum_{i \neq j} \sum_j (f_j h) \left(\frac{\kappa_i^2}{f_j} h \right) = \\ \int_0^\Lambda n^2(x) dx \int_0^\Lambda \frac{k_0^2 n^2(x) - \beta^2}{n^2(x)} dx = \\ k_0^2 \Lambda \int_0^\Lambda n^2(x) dx - \beta^2 \int_0^\Lambda n^2(x) dx \int_0^\Lambda \frac{1}{n^2(x)} dx \end{aligned} \quad (6.48)$$

再根据 Floquet 定理,并利用薄膜近似,可得一个周期 Λ 对应的转移矩阵的迹

$$\begin{aligned} \text{tr}[M(\Lambda)] = 2 \cos K \Lambda = \\ 2 - (K \Lambda)^2 \end{aligned} \quad (6.49)$$

式中 K 是光在多量子阱光波导中传播的横向波矢,由式(6.21)定义。再根据式(6.45),容易导出任意折射率分布多量子阱光波导芯子层的

等效折射率公式。

对 TE 模

$$(n_e^{\text{TE}})^2 = \frac{1}{\Lambda} \int_0^{\Lambda} n^2(x) dx \quad (6.50)$$

对 TM 模

$$(n_e^{\text{TM}})^2 = \frac{1}{\Lambda} \int_0^{\Lambda} n^2(x) dx - \left[\frac{1}{\Lambda^2} \int_0^{\Lambda} n^2(x) dx \int_0^{\Lambda} \frac{1}{n^2(x)} dx - 1 \right] (\beta/k_0)^2 \quad (6.51)$$

为验证式(6.50)和(6.51)的正确性,考虑简单的阶跃折射率分布的多量子阱光波导

$$n^2(x) = \begin{cases} n_1^2 & 0 < x < h_1 \\ n_2^2 & h_1 < x < h_1 + h_2 \end{cases} \quad (6.52)$$

式中, $h_1 + h_2 = \Lambda$, 把式(6.52)代入(6.50)和(6.51), 容易得到与式(6.28)和(6.29)完全一致的公式。

在实际应用中,有时会遇到三角形、双曲形或其他形式折射率分布的多量子阱光波导结构。显然,公式(6.50)和(6.51)是利用等效折射率近似处理这类多量子阱光波导结构的有力工具。

6.3.2 非等效折射率方法^[6.8]

上节使用的近似称为等效折射率方法,它的实质是用一恒定的折射率等效多量子阱光波导芯子层周期性变化的折射率分布。这个方法只要求推导多量子阱光波导一个周期 Λ 对应的转移矩阵的迹,而不要求转移矩阵本身。这确实对理论推导过程带来许多方便之处,但处理问题的过程还是间接的。即首先需要把多量子阱光波导等效成一个简单的三层平板波导,然后再分析等效的三层平板波导,这个过程在数学上是可以理解的,但在物理上是不可能完全等效的,可能会损失某些物理含义。例如,两层基膜的“色散”是不可被完全等效的。为减少这种损失,本节摒弃了等效折射率的概念,在数学上直接推导多量子阱光波导一个周期 Λ 对应的转移矩阵,在此基础上,再考虑边界条件,得到

了任意折射率分布多量子阱光波导 TE 和 TM 两种偏振状态下的色散方程。

参考图 6.3 所示的任意折射率分布的多量子阱光波导。沿用上节的结果,可知多量子阱光波导一个周期 Λ 对应的转移矩阵是 l 个 M_i ($i=1,2,\dots,l$) 矩阵的积,而 M_i 由式(6.41)或(6.42)表示。与上节不同之处在于:本节须求出转移矩阵 $M(\Lambda)$,而不是 $M(\Lambda)$ 的迹。下面进行 l 个 M_i 矩阵的求积过程。

$$\begin{aligned}
 M(\Lambda) &= M_1 M_2 \cdots M_{l-1} M_l = \\
 &E^l - \sum_i (f_i h) (E^{i-1} A E^{l-i}) + \\
 &\sum_i \left(\frac{\kappa_i^2}{f_i} h \right) (E^{i-1} B E^{l-i}) - \frac{1}{2} \sum_i (\kappa_i h)^2 E^l + \\
 &\frac{1}{2} \sum_{\{i \neq j\}} \sum (f_i h) (f_j h) (E^{i-1} A E^{j-i-1} A E^{l-j}) + \\
 &\frac{1}{2} \sum_{\{i \neq j\}} \sum \left(\frac{\kappa_i^2}{f_i} h \right) \left(\frac{\kappa_j^2}{f_j} h \right) (E^{i-1} B E^{j-i-1} B E^{l-j}) - \\
 &\frac{1}{2} \sum_{\{i \neq j\}} \sum (f_i h) \left(\frac{\kappa_j^2}{f_j} h \right) (E^{i-1} A E^{j-i-1} B E^{l-j}) - \\
 &\frac{1}{2} \sum_{\{i \neq j\}} \sum \left(\frac{\kappa_i^2}{f_i} h \right) (f_j h) (E^{i-1} B E^{j-i-1} A E^{l-j}) \quad (6.53)
 \end{aligned}$$

式中,右边第一项是 l 个 M_i 矩阵中的第一项相乘的结果;第二、三、四项分别是 $(l-1)$ 个 M_i 矩阵中的第一项与剩下的一个 M_i 矩阵中的第二、三、四项相乘并对 i 求和的结果,与式(6.44)不同之处是:这里的矩阵求积时不可以互换位置;第五项是 $(l-2)$ 个 M_i 矩阵中的第一项与剩下的两个 M_i 矩阵中的第二项相乘并对 i, j 求和所得;第六项的含义与第五项类似,它是 $(l-2)$ 个 M_i 矩阵中的第一项与剩下的两个 M_i 矩阵中的第三项相乘并对 i, j 求和之结果;第七项是 $(l-2)$ 个 M_i 矩阵中的第一项与剩下的两个 M_i 矩阵中的第二和第三两项相乘并对 i, j 求和所得;交换两个 M_i 矩阵中第二项和第三项的位置,便可得到第八

项。以上推导只取二阶以下小量,三阶和三阶以上小量均已忽略。

根据矩阵 E 、 A 和 B 的特殊性质,容易看到

$$E^l = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E^{i-1} A E^{l-i} = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E^{i-1} B E^{l-i} = B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E^{i-1} A E^{j-i-1} A E^{l-j} = A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E^{i-1} B E^{j-i-1} B E^{l-j} = B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E^{i-1} A E^{j-i-1} B E^{l-j} = AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E^{i-1} B E^{j-i-1} A E^{l-j} = BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由以上结果,式(6.53)变为

$$M(\Lambda) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2} \sum_i (\kappa_i h)^2 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \neq j}} \sum_j (f_j h) \left(\frac{\kappa_i^2}{f_j} h \right) & - \sum_i (f_i h) \\ \sum_i \left(\frac{\kappa_i^2}{f_i} h \right) & 1 - \frac{1}{2} \sum_i (\kappa_i h)^2 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \neq j}} \sum_j (f_j h) \left(\frac{\kappa_i^2}{f_j} h \right) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (f_j h) \left(\frac{\kappa_i^2}{f_j} h \right) & - \sum_i (f_i h) \\ \sum_i \left(\frac{\kappa_i^2}{f_i} h \right) & 1 - \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (f_j h) \left(\frac{\kappa_i^2}{f_j} h \right) \end{bmatrix} \quad (6.54)$$

式(6.54)中第二个矩阵中的二重求和已包括 $i = j$ 特殊情况。当 $l \rightarrow \infty, h \rightarrow 0$ 时,式中的求和可变为积分,

对 TE 模,有

$$M(\Lambda) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2} \int_0^\Lambda dx \cdot \int_0^\Lambda [k_0^2 n^2(x) - \beta^2] dx & - \int_0^\Lambda dx \\ \int_0^\Lambda [k_0^2 n^2(x) - \beta^2] dx & 1 - \frac{1}{2} \int_0^\Lambda dx \cdot \int_0^\Lambda [k_0^2 n^2(x) - \beta^2] dx \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

而对 TM 模,有

$$M(\Lambda) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2} \int_0^\Lambda n^2(x) dx \cdot \int_0^\Lambda \frac{k_0^2 n^2(x) - \beta^2}{n^2(x)} dx & - \int_0^\Lambda n^2(x) dx \\ \int_0^\Lambda \frac{k_0^2 n^2(x) - \beta^2}{n^2(x)} dx & 1 - \frac{1}{2} \int_0^\Lambda n^2(x) dx \cdot \int_0^\Lambda \frac{k_0^2 n^2(x) - \beta^2}{n^2(x)} dx \end{bmatrix} \quad (6.56)$$

根据 Floquet 定理,在周期性介质中的传播波矢 K 满足以下方程:

$$\cos(K\Lambda) = \frac{1}{2} \text{tr}[M(\Lambda)]$$

于是,由式(6.55),可得

$$\cos(K\Lambda) = 1 - \frac{1}{2} \int_0^\Lambda dx \cdot \int_0^\Lambda [k_0^2 n^2(x) - \beta^2] dx \quad (6.57)$$

在薄膜近似下,即 $K\Lambda \ll 1$,上式右边第二项可看作一个二阶小量,由此可得

$$\sin(K\Lambda) = (1 - \cos^2(K\Lambda))^{1/2} \approx \int_0^\Lambda dx \cdot \int_0^\Lambda [k_0^2 n^2(x) - \beta^2] dx \quad (6.58)$$

把式(6.57)和(6.58)代入(6.55),则可得到多量子阱光波导一个周期 Λ 对应的转移矩阵

$$M(\Lambda) = \begin{bmatrix} \cos K\Lambda & -\frac{1}{\eta} \sin K\Lambda \\ \eta \sin K\Lambda & \cos K\Lambda \end{bmatrix} \quad (6.59)$$

式中

$$\eta = \left(\int_0^{\Lambda} [k_0^2 n^2(x) - \beta^2] dx / \int_0^{\Lambda} dx \right)^{1/2} \quad (6.60)$$

对于具有 N 个周期的多量子阱光波导的芯子层,它所对应的转移矩阵由下式表示

$$M(N\Lambda) = \begin{bmatrix} \cos(NK\Lambda) & -\frac{1}{\eta} \sin(NK\Lambda) \\ \eta \sin(NK\Lambda) & \cos(NK\Lambda) \end{bmatrix} \quad (6.61)$$

对 TM 模,转移矩阵 $M(\Lambda)$ 和 $M(N\Lambda)$ 具有与式(6.59)和(6.61)相同的形式,但 $K\Lambda$ 和 η 将由以下两式定义。

$$\cos(K\Lambda) = 1 - \frac{1}{2} \int_0^{\Lambda} n^2(x) dx \cdot \int_0^{\Lambda} \frac{k_0^2 n^2(x) - \beta^2}{n^2(x)} dx \quad (6.62)$$

$$\eta = \left[\int_0^{\Lambda} \frac{k_0^2 n^2(x) - \beta^2}{n^2(x)} dx / \int_0^{\Lambda} n^2(x) dx \right]^{1/2} \quad (6.63)$$

实际上,一个周期 Λ 对应的转移矩阵由式(6.55)和(6.56)表示,但这种形式的矩阵难以扩展到 N 个周期的情况。因此有必要利用 Floquet 定理写成式(6.59)的形式,然后,再利用切比多夫多项式扩展成 N 个周期对应的转移矩阵,即式(6.61)。

根据转移矩阵理论,并参考式(2.53)和(2.54),可得多量子阱光波导两种偏振态状态下的色散方程。

对 TE 模,有

$$\begin{bmatrix} -q & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(NK\Lambda) & -\frac{1}{\eta} \sin(NK\Lambda) \\ \eta \sin(NK\Lambda) & \cos(NK\Lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -p \end{bmatrix} = 0 \quad (6.64)$$

经整理,可得

$$\tan(NK\Lambda) = \frac{p+q}{\eta(1-pq/\eta^2)} \quad (6.65)$$

式中, $K\Lambda$ 和 η 分别由式(6.57)和(6.60)定义。

对 TM 模,有

$$\begin{bmatrix} -\frac{q}{n_3^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(NK\Lambda) & -\frac{1}{\eta} \sin(NK\Lambda) \\ \eta \sin(NK\Lambda) & \cos(NK\Lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{p}{n_0^2} \end{bmatrix} = 0 \quad (6.66)$$

经整理,可得

$$\tan(NK\Lambda) = \frac{p/n_0^2 + q/n_3^2}{\eta[1 - pq/(n_0^2 n_3^2 \eta^2)]} \quad (6.67)$$

式中, $K\Lambda$ 和 η 分别由式(6.62)和(6.63)定义。

为了说明上述公式的可靠性,考虑一个 GaAs/GaAlAs 材料构成的阶跃折射率分布的多量子阱光波导,其典型参数为

$$n_1 = 3.50, n_2 = 3.20, n_3 = 1.0, n_0 = 3.30$$

$$w = 1\mu\text{m}, h_1 = h_2 = w/2N$$

精确的色散方程由 Lenz 和 Salzman^[6,9]给出。本节理论与精确理论比较由图 6.4 所示,图中画出了有效折射率 β/k_0 随波长 λ 变化的曲线。

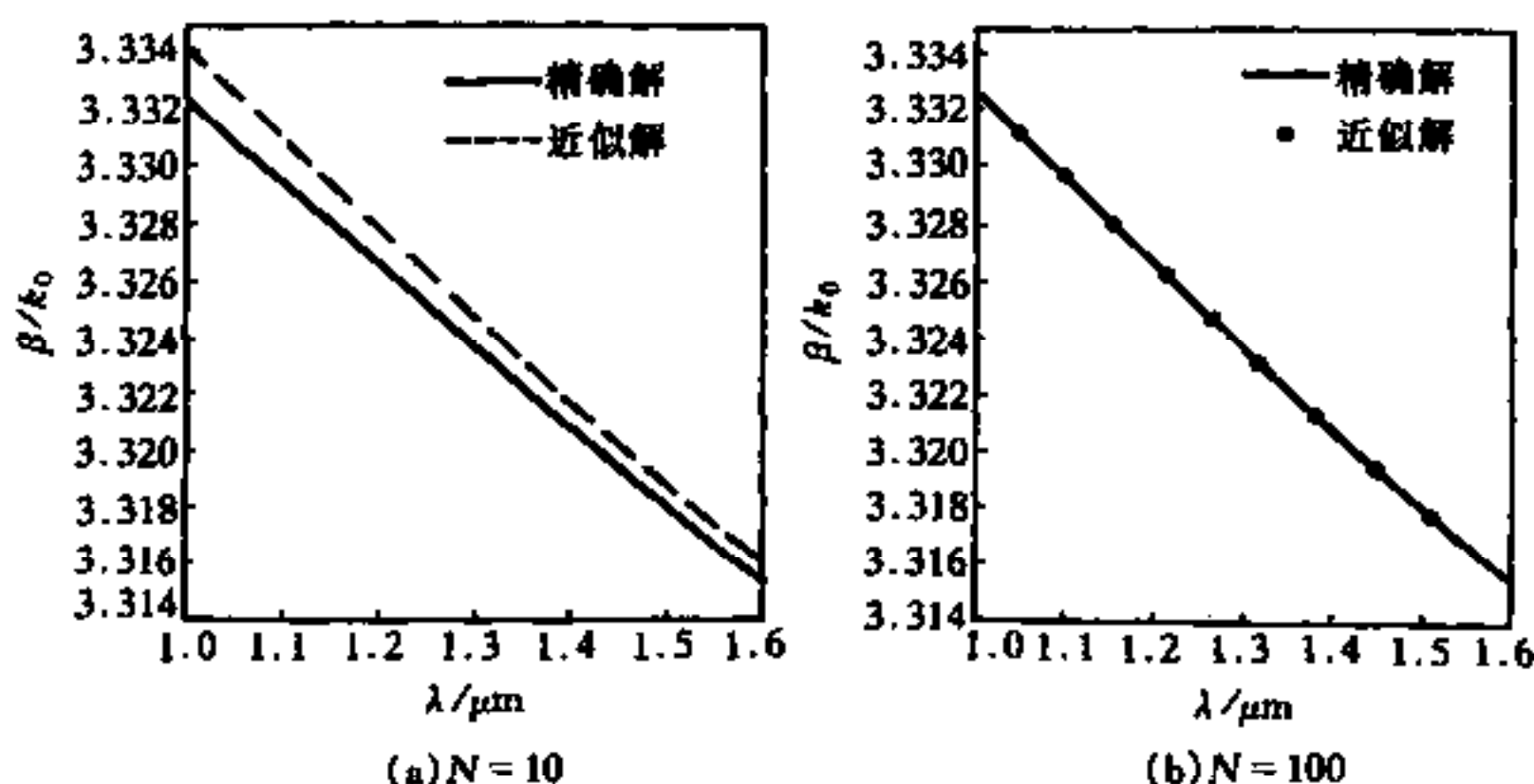


图 6.4 有效折射率 β/k_0 随波长 λ 的变化

由图可见,当 $N=10$ 时,本节理论与精确公式相比,有效折射率尚有 0.1% 的误差。当 N 增大时,精确度有较大的改进,对 $N=100$,两根曲线几乎重合,误差完全可以忽略。这说明了本节理论的适用范围是 $K\Lambda \ll 1$,与薄膜近似的要求是一致的。

6.4 分层复合材料中的非线性增强效应

6.4.1 无限扩展分层复合材料中的非线性一次增强效应

众所周知,多量子阱和超晶格的两种基膜一般是由性质相似但掺杂浓度不同的同类半导体通过分子束外延(MBE)或金属有机化学气相沉积(MOCVD)等现代生长技术制备而成。例如, GaAs/AlGaAs 系统。但最近引起广泛重视的分层复合材料,虽然在结构上与多量子阱和超晶格具有相同的形态,但它是由两种性质完全不同的材料通过真空淀积、自旋涂覆和 LB 技术制备而成。当两类基膜中的一种组分具有大的非线性响应和小的介电系数时,会引起非线性一次增强效应。这是由 Boyd 和 Sipe 等开创的新的研究领域^[6.10]。

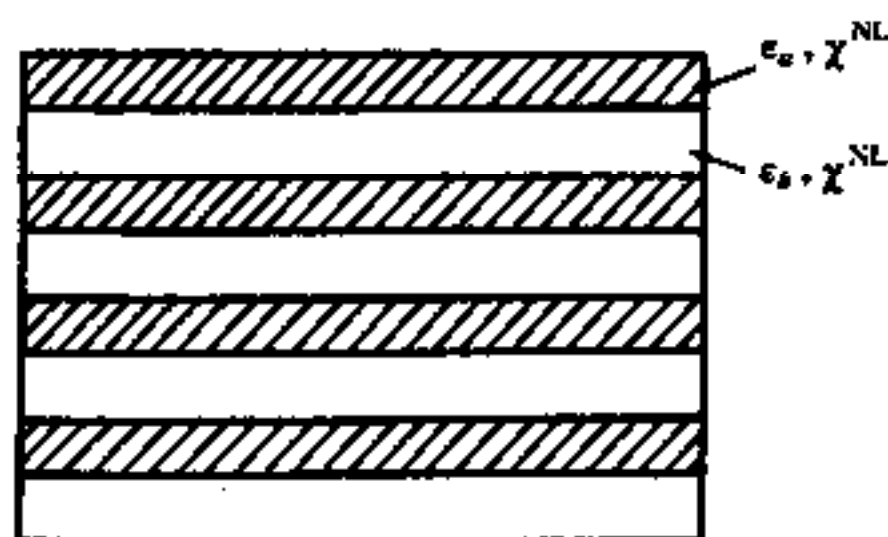


图 6.5 无限扩展分层复合材料

考虑图 6.5 所示的无限扩展分层复合材料。该结构由厚度分别为 a 和 b 的两种材料周期性地交替组成,且 a 和 b 远小于光波长 λ (薄膜近似)。材料的介电系数和非线性光学极化率分别用 ϵ 和 χ^{NL} 表示。根据 6.2 节的分析,该结构的等效介电系数由以下两式表示。

对 TE 模(电场沿 y 方向偏振),有

$$\epsilon_{\text{eff}}^{\infty} = f_a \epsilon_a + f_b \epsilon_b \quad (6.68)$$

对 TM 模(磁场沿 y 方向偏振,电场的分量沿 x 方向偏振),有

$$\frac{1}{\epsilon_{\text{eff}}^{\infty}} = \frac{f_a}{\epsilon_a} + \frac{f_b}{\epsilon_b} \quad (6.69)$$

式中,上标“ ∞ ”表示无限扩展结构,而 f_a 和 f_b 称为介质 a 和 b 的体积因子,分别定义为

$$\left. \begin{aligned} f_a &= \frac{a}{a+b} \\ f_b &= \frac{b}{a+b} \end{aligned} \right\} \quad (6.70)$$

(1) 线性响应 对 TM 模,在 a 、 b 两种介质的分界面上,由于电位移矢量法向连续,故有 $\epsilon_a E_a = \epsilon_b E_b$ 。 E_a 和 E_b 分别为 a 、 b 两种介质中 x 方向的电场分量。对一宏观电场 $E(\omega)$,则显然有

$$\left. \begin{aligned} E_a(\omega) &= \frac{\epsilon_{\text{eff}}(\omega)}{\epsilon_a(\omega)} E(\omega) \\ E_b(\omega) &= \frac{\epsilon_{\text{eff}}(\omega)}{\epsilon_b(\omega)} E(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (6.71)$$

式中, $\epsilon_{\text{eff}}(\omega)/\epsilon_a(\omega)$ 和 $\epsilon_{\text{eff}}(\omega)/\epsilon_b(\omega)$ 分别为介质 a 和 b 中的局域场增强因子。只要这个因子大于 1,则将引起非线性一次增强效应。

由图 6.6 可见,当 $\epsilon_b/\epsilon_a = 4$ 时, $\epsilon_{\text{eff}}(\omega)/\epsilon_a(\omega)$ 可达最大值 4.0。

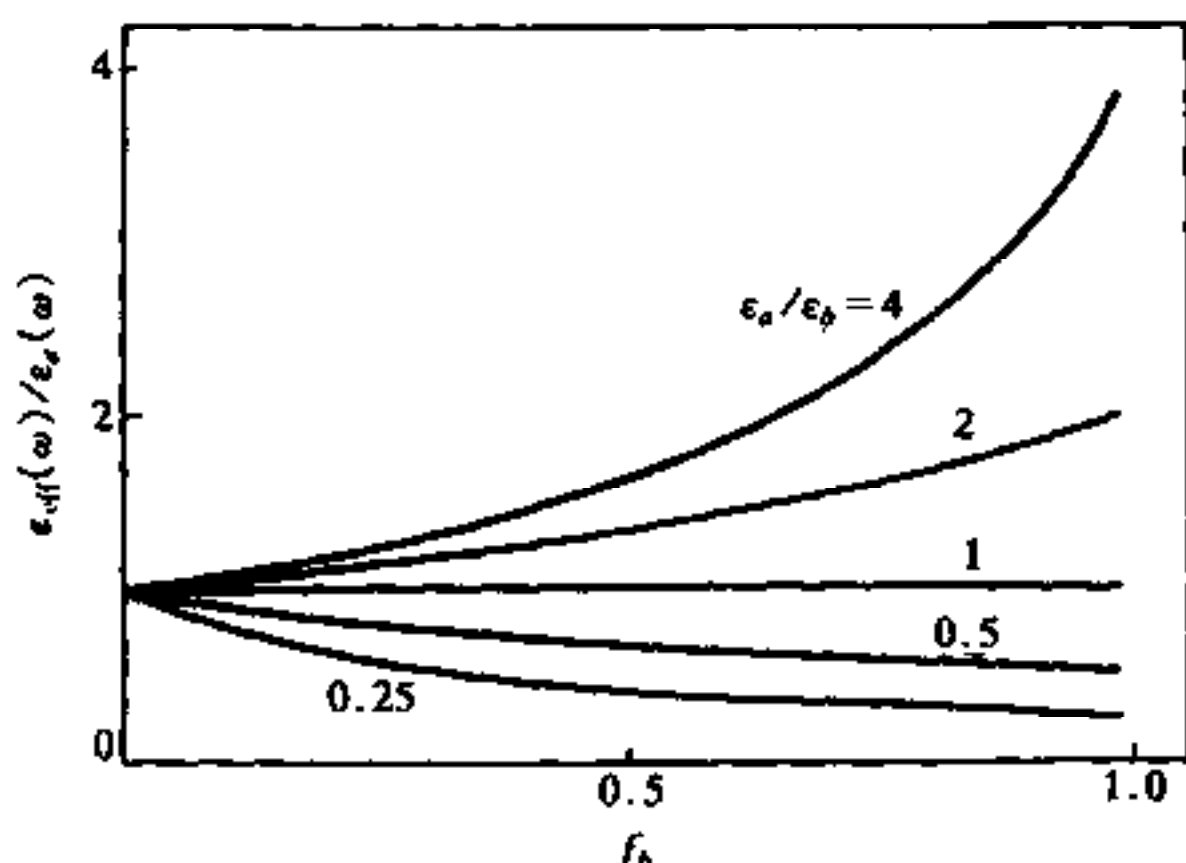


图 6.6 局域场增强因子 $\epsilon_{\text{eff}}(\omega)/\epsilon_a(\omega)$ 对体积因子 f_b 的依赖关系

(2) 二倍频(SHG) 设介质 a 和 b 与 TM 偏振有关的关于二倍频

的非线性极化率分别为

$$\chi_a^{(2)} = \chi_a^{(2)}(2\omega = \omega + \omega)$$

$$\chi_b^{(2)} = \chi_b^{(2)}(2\omega = \omega + \omega)$$

则通过分析得到的关于二倍频的等效非线性极化率:

$$\chi_{\text{eff}}^{(2)}(2\omega = \omega + \omega) = \frac{\frac{f_a \chi_a^{(2)}}{\epsilon_a(2\omega) \epsilon_a^2(\omega)} + \frac{f_b \chi_b^{(2)}}{\epsilon_b(2\omega) \epsilon_b^2(\omega)}}{\left[\frac{f_a}{\epsilon_a(\omega)} + \frac{f_b}{\epsilon_b(\omega)} \right]^2 \left[\frac{f_a}{\epsilon_a(2\omega)} + \frac{f_b}{\epsilon_b(2\omega)} \right]} \quad (6.72)$$

图 6.7 画出了关于二倍频的等效非线性极化率对体积因子 f_b 的依赖关系。为简单计, 这里假设只有介质 a 具有二阶非线性响应, 即有 $\chi_b^{(2)} = 0$, 并忽略介电系数的色散, 即有 $\epsilon_a(2\omega) = \epsilon_a(\omega)$ 和 $\epsilon_b(2\omega) = \epsilon_b(\omega)$ 。由图可见, 在可实现的实验条件下, 当 $f_b = 0.75$ 时, 关于二倍频的等效非线性增强因子 $\chi_{\text{eff}}^{(2)} / \chi_a^{(2)}$ 近似等于 3。

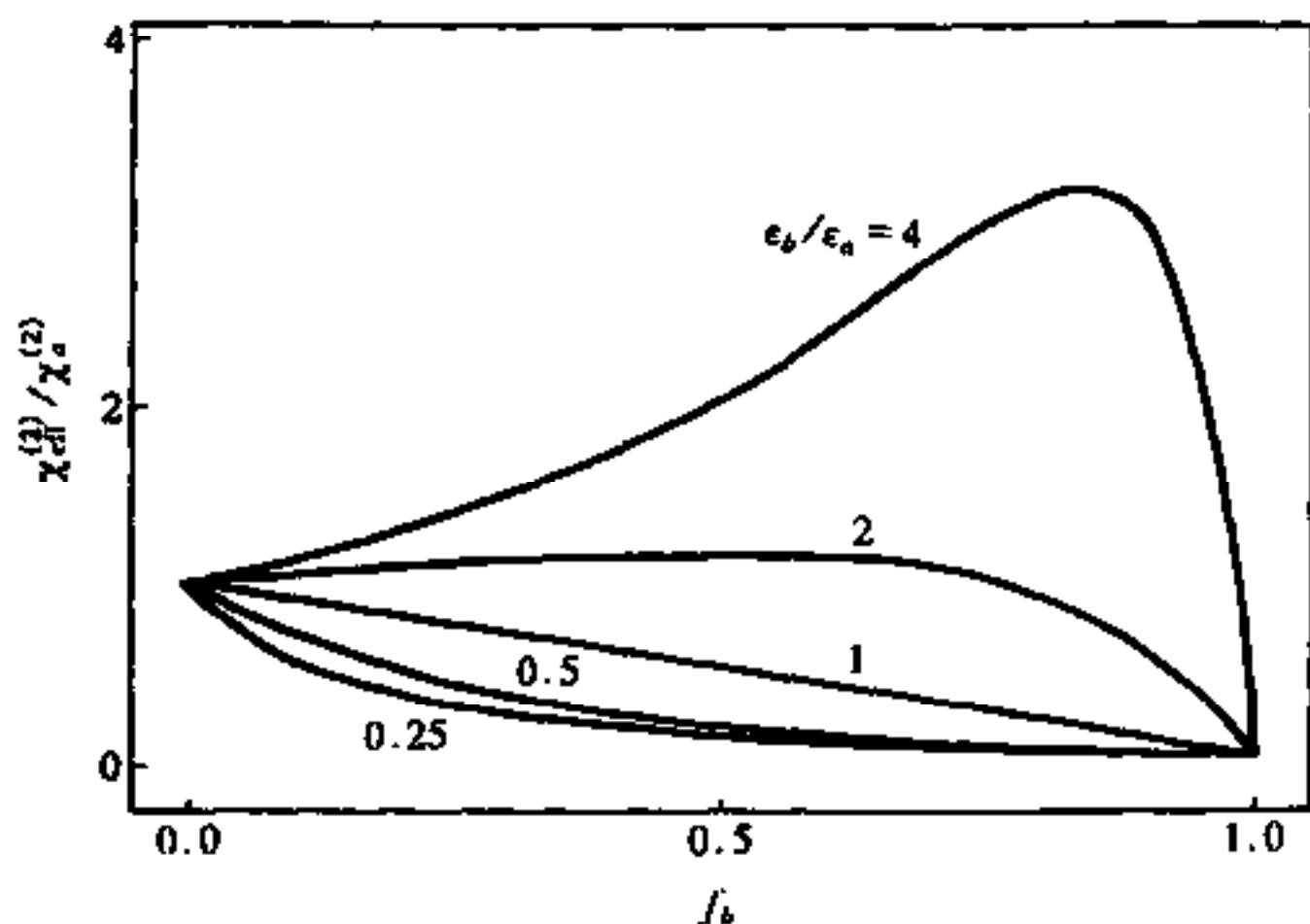


图 6.7 二倍频的等效非线性极化率对体积因子 f_b 的依赖关系

(3) 电光效应(Pockels Effect) 设介质 a 和 b 与 TM 偏振有关的关于电光效应的非线性极化率为

$$\chi_a^{(2)} = \chi_a^{(2)}(\omega = \omega + 0)$$

$$\chi_b^{(2)} = \chi_b^{(2)}(\omega = \omega + 0)$$

则描述电光效应的等效非线性极化率为

$$\chi_{\text{eff}}^{(2)}(\omega = \omega + 0) = \frac{\frac{f_a \chi_a^{(2)}}{\epsilon_a(0) \epsilon_a^2(\omega)} + \frac{f_b \chi_b^{(2)}}{\epsilon_b(0) \epsilon_b^2(\omega)}}{\left[\frac{f_a}{\epsilon_a(\omega)} + \frac{f_b}{\epsilon_b(\omega)} \right]^2 \left[\frac{f_a}{\epsilon_a(0)} + \frac{f_b}{\epsilon_b(0)} \right]} \quad (6.73)$$

图 6.8 画出了电光效应的等效非线性极化率对体积因子 f_b 的依赖关系。这里仍假设只有介质 a 具有二阶非线性响应, 即 $\chi_b^{(2)} = 0$, 另外, 由于介质的直流介电系数往往远大于光频介电系数, 因此这里不能忽略介质的色散。由图可见, 在这种情况下获得更大的非线性增强效应是可能的。

(4) 非线性折射率(Kerr Effect) 设介质 a 和 b 与 TM 偏振有关的关于克尔效应的三阶非线性极化率分别为

$$\chi_a^{(3)} = \chi_a^{(3)}(\omega = \omega + \omega - \omega)$$

$$\chi_b^{(3)} = \chi_b^{(3)}(\omega = \omega + \omega - \omega)$$

则描述克尔效应的等效非线性极化率为

$$\chi_{\text{eff}}^{(3)}(\omega = \omega + \omega - \omega) = \frac{\frac{f_a \chi_a^{(3)}}{|\epsilon_a(\omega)|^2 \epsilon_a^2(\omega)} + \frac{f_b \chi_b^{(3)}}{|\epsilon_b(\omega)|^2 \epsilon_b^2(\omega)}}{\left| \frac{f_a}{\epsilon_a(\omega)} + \frac{f_b}{\epsilon_b(\omega)} \right|^2 \left[\frac{f_a}{\epsilon_a(\omega)} + \frac{f_b}{\epsilon_b(\omega)} \right]^2} \quad (6.74)$$

图 6.9 画出了关于克尔效应的等效非线性极化率对体积因子 f_b 的依赖关系。仍然假设只有介质 a 具有三阶非线性响应, 即有 $\chi_b^{(3)} = 0$, 由图可见, 在可实现条件下, 三阶非线性增强可达一个数量级。

6.4.2 分层复合材料光波导中的非线性二次增强效应^[6.11]

考虑图 6.10 所示的分层复合材料光波导结构, 设光导波沿 z 方

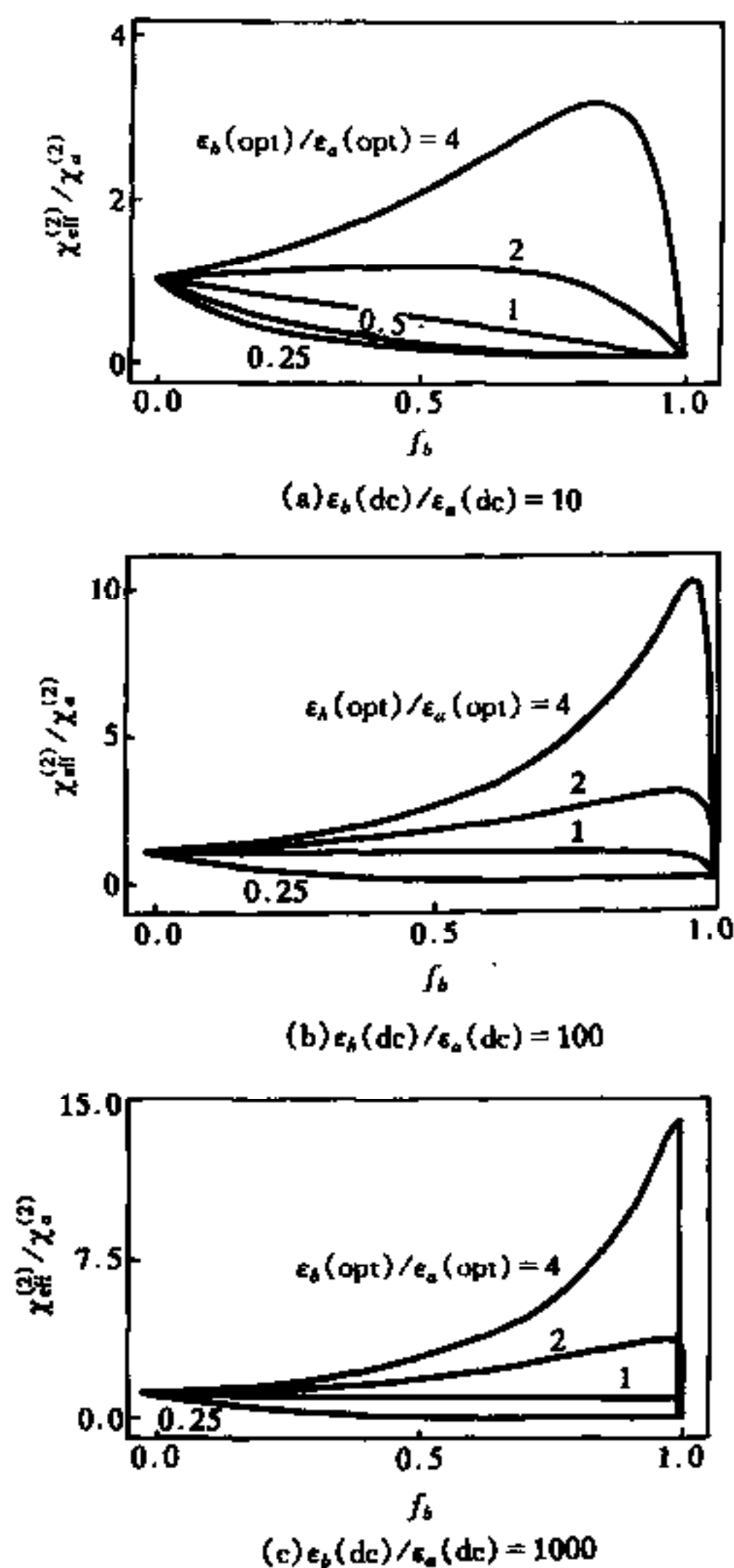


图 6.8 电光效应的等效非线性极化率对体积因子 f_b 的依赖关系
向传播, 而光波导芯子层的厚度为 w 。根据 6.3 节的分析, 对光波导,
TM 模的等效介电系数

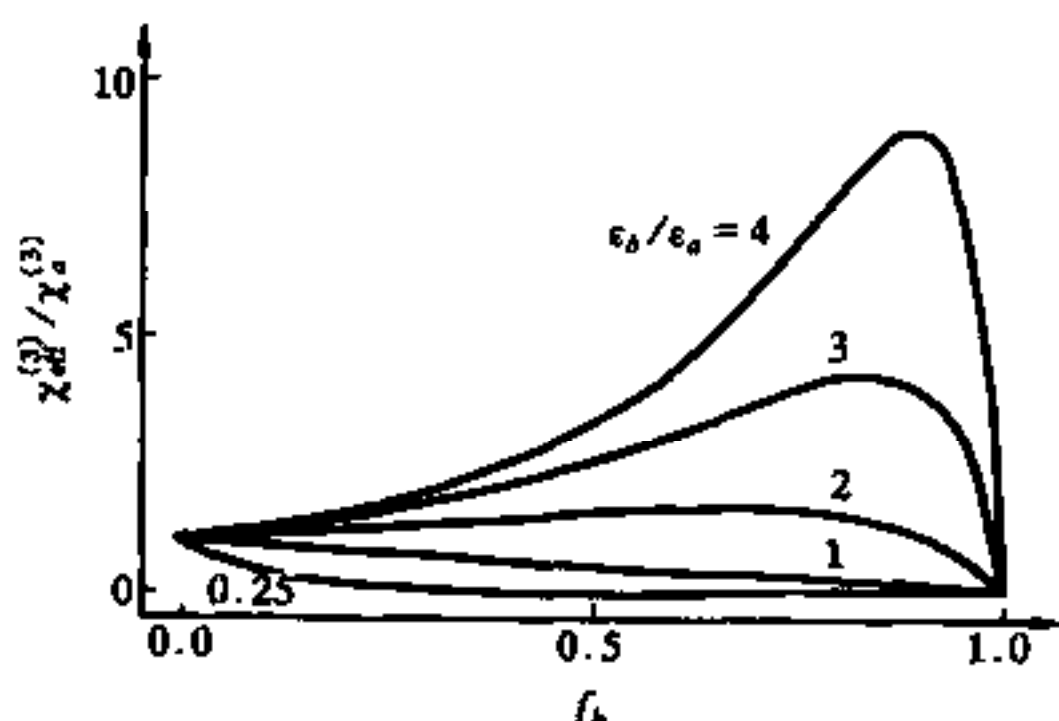


图 6.9 克尔效应的等效非线性极化率对体积因子 f_b 的依赖关系

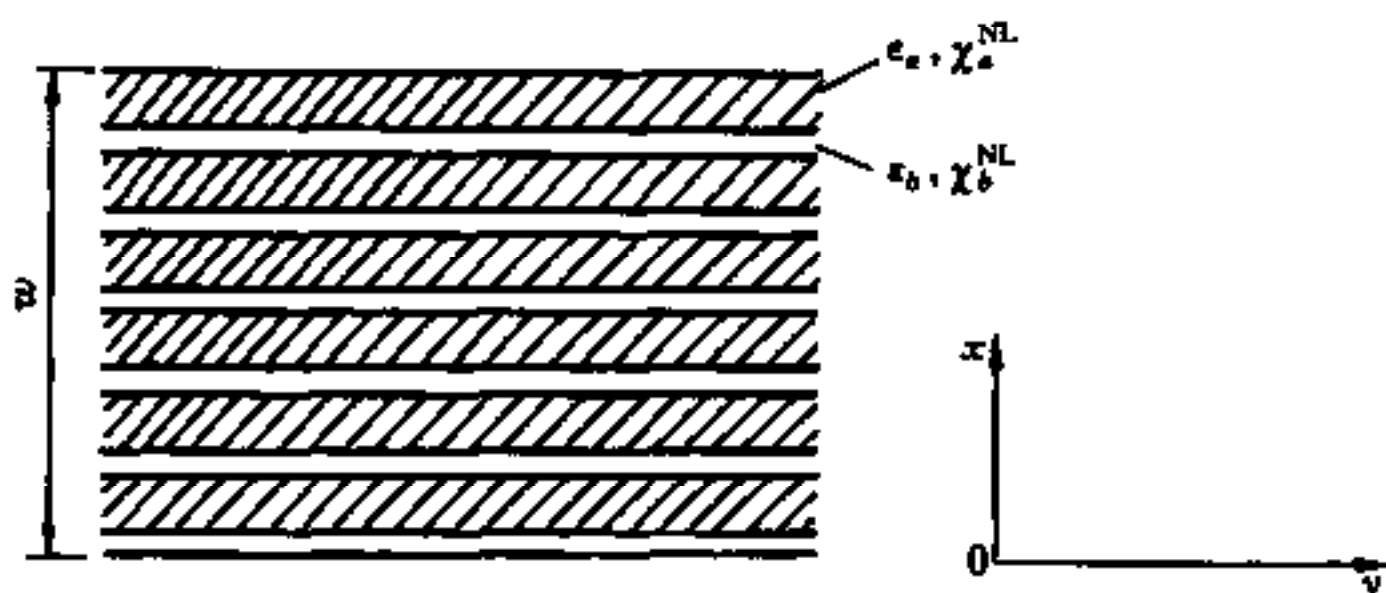


图 6.10 分层复合材料光波导结构

$$\epsilon_{eff}^w = f_a \epsilon_a + f_b \epsilon_b - f_a f_b \frac{(\epsilon_a - \epsilon_b)^2}{\epsilon_a \epsilon_b} \cdot \epsilon_m \quad (6.75)$$

式中, $\epsilon_m = (\beta/k_0)^2$ 称为有效介电系数; 上标“w”表示光波导结构。

根据式(6.69), 并由式(6.70)可得 $f_a + f_b = 1$, 则容易得到

$$f_a \epsilon_a + f_b \epsilon_b = \epsilon_{eff}^w + f_a f_b \frac{(\epsilon_a - \epsilon_b)^2}{f_a \epsilon_b + f_b \epsilon_a} \quad (6.76)$$

把式(6.76)代入(6.75), 可得

$$\epsilon_{eff}^w = \epsilon_{eff}^\infty + f_a f_b \frac{(\epsilon_a - \epsilon_b)^2}{\epsilon_a \epsilon_b} \cdot (\epsilon_{eff}^\infty - \epsilon_m) \quad (6.77)$$

由光波导理论可知, 当 $w \rightarrow \infty$ 时, 有 $\epsilon_m \rightarrow \epsilon_{eff}^\infty$, 因此, 不等式

$$\epsilon_{eff}^w > \epsilon_{eff}^\infty \quad (6.78)$$

永远是成立的。

以上讨论可得出重要结论:分层复合材料光波导对应 TM 模的介电系数总是大于对应无限扩展结构的等效介电系数。而对 TE 模,分层复合材料光波导的等效介电系数仍由式(6.68)表示。

注意到式(6.71)~(6.74)四式的分母均为 $\epsilon_{\text{eff}}^{\infty}$ 的倒数,在这四式中,若用 ϵ_{eff}^w 代替 $\epsilon_{\text{eff}}^{\infty}$,则容易看出,光波导结构中的非线性效应将进一步得到增强,对照无限扩展结构中的非线性一次增强效应,可以称这种现象为非线性二次增强效应。以下,以线性响应和二倍频为例来说明这个问题。

(1) 线性响应 分别用 $\epsilon_{\text{eff}}^{\infty}$ 和 ϵ_{eff}^w 代入式(6.71),当 $\epsilon_b/\epsilon_a = 4$, 且有 $w = 0.12\mu\text{m}$ 时,可得图 6.11 所示的光波导和无限扩展结构中 a 介质局域增强因子 $\epsilon_{\text{eff}}/\epsilon_a$ 随体积因子 f_b 的变化曲线。由图可见,光波导的局域场增强因子总是大于无限扩展结构的局域场增强因子。

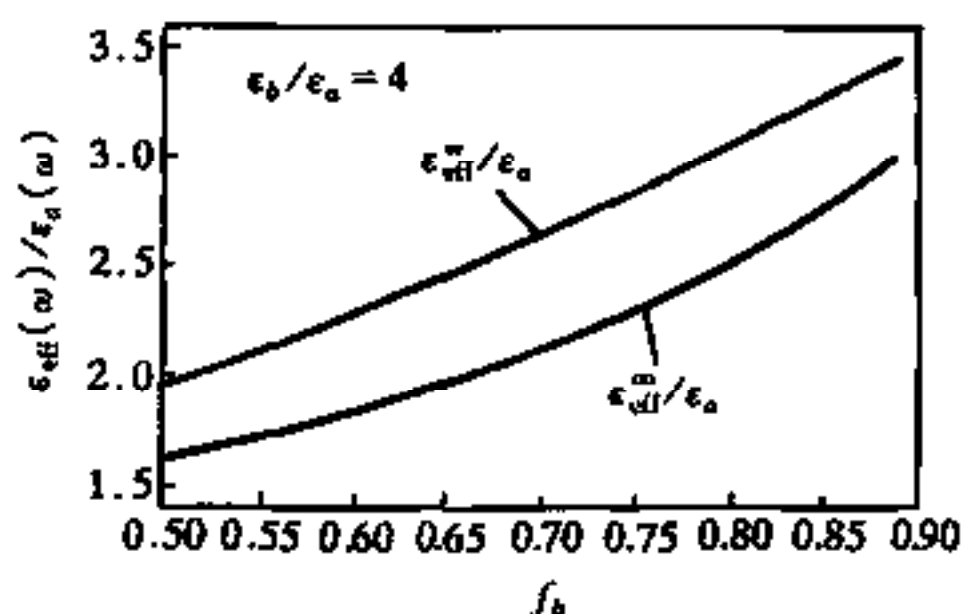


图 6.11 光波导和无限扩展结构中 a 介质局域增强因子 $\epsilon_{\text{eff}}/\epsilon_a$ 随体积因子 f_b 的变化曲线

(2) 二倍频 分别用 $\epsilon_{\text{eff}}^{\infty}$ 和 ϵ_{eff}^w 代入式(6.72),当 $\epsilon_b/\epsilon_a = 4$, 且有 $w = 0.12\mu\text{m}$ 时,可得图 6.12 所示的光波导和无限扩展结构中 a 介质关于二倍频的等效非线性增强因子 $\chi_{\text{eff}}^{(2)}/\chi_a^{(2)}$ 随体积因子 f_b 的变化曲线。有图可见,当 $f_b = 0.75$ 时,无限扩展结构中的等效非线性增强因子近似等于 3,而光波导中的等效非线性增强因子近似等于 5。

通过相同的步骤,可得到关于电光效应和三阶非线性折射率的二

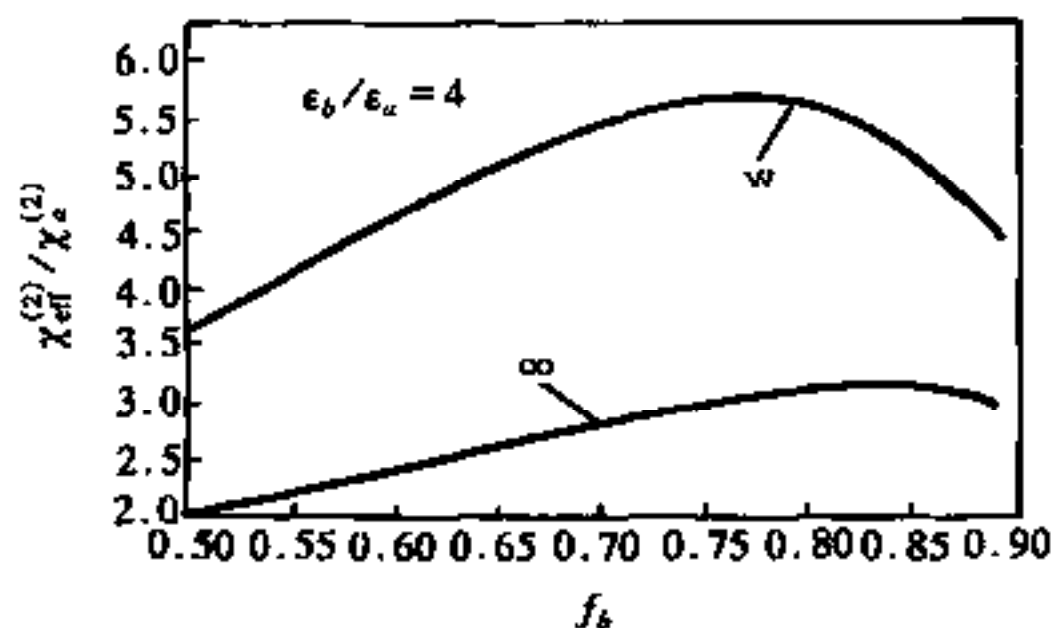


图 6.12 光波导和无限扩展结构中 a 介质关于二倍频的等效非线性增强因子 $\chi_{\text{eff}}^{(2)}/\chi_a^{(2)}$ 随体积因子 f_b 的变化曲线

次增强因子,因方法雷同,而且结果很明显,故这里不再赘述。

参考文献

- [6.1] V. M. Agranovich, V. E. Kravtsov. Solid State Communications, 1985, 55(1): 85~90.
- [6.2] R. E. Smith, L. A. Molter, M. Dutta. IEEEJ. Quant. Electron., 1991, 27(5): 1119~1122.
- [6.3] Ohke S, T. Umeda, Y. Cho. Opt. Commun., 1985, 56(4): 235~239.
- [6.4] Ohke S, T. Umeda, Y. Cho. Opt. Commun., 1989, 70(2): 92~96.
- [6.5] I. M. Skinner, R. Shail, B. L. Weiss. IEEEJ. Quant. Electron., 1989, 25(1): 6~11.
- [6.6] 曹庄琪. 光学学报. 1991, 11(4): 289~293.
- [6.7] Z. Cao, C. Hu, G. Jin. J. Opt. Soc. Am. B. 1991, 8(12): 2519~2522.
- [6.8] Z. Cao, C. N. Ironside. Opt. Commun., 1992, 91(3,4): 203~209.
- [6.9] G. Lenz, J. Salzman. J. Lightwave Technol. 1990, 8: 1803~1809.
- [6.10] R. W. Boyd, J. E. Sipe. J. Opt. Soc. Am. B, 1994, 11(2): 297~303.
- [6.11] 曹庄琪, 王强, 沈启舜, 等. 光学学报, 1997, 17(8): 1256~1258.

第 7 章 泄漏波导

7.1 引言

众所周知,三层平板波导是一种类透镜介质,它具有使光波聚焦进薄膜的自然倾向。由于波导薄膜的折射率大于覆盖层和衬底介质的折射率,因而光导波是一种慢波。这表明在衬底和覆盖层介质中的光波不可能直接耦合成为光导波;反过来,光导波也不可能成为衬底和覆盖层介质中的辐射波。按照波导的势阱模型^[7.1],波导薄膜对应于势阱,而覆盖层和衬底对应于势垒,这两个向无限远伸展的势垒保证了光导波无损耗(不考虑介质的吸收和散射)地传输。但在集成光路中,由于光的耦合、器件制备的需要以及光路方向的改变等原因,必然引起波导结构的变化,而某些波导结构的变化往往会引发波导内模式的耦合。导模和导模之间的耦合只涉及导模间能量的交换,而导模与辐射模的耦合将引起波导能量的泄漏。例如,棱镜耦合器和弯曲波导,由于这两种结构破坏了向无限远伸展的势垒的形态,使波导内的能量向周围空间辐射。这两类结构称为泄漏波导。严格地说,这两类结构中已不存在真正的导模,只有当波导中能量泄漏极为微小时,才能在微扰的意义上分析这两类结构中光导波的传输。本章首先介绍棱镜一波导耦合系统的微扰处理,并在此基础上,分析弯曲波导中能量的辐射。

7.2 棱镜一波导耦合系统

用折射率较高的棱镜把光束耦合到平面结构中去的问题在介质光波导出现之前很久就已进行了研究。例如,奥斯特伯格(Osterberg)和史密斯(Smith)^[7.2]在 1964 年就报道过用棱镜耦合的实验。在 1968 年,奥托(Otto)开始了在金属薄膜中用棱镜激发表面等离子体激元的一系列工作^[7.3]。然而,只是在 1969 年,才由华盛顿大学和贝尔电话

实验室的两个研究小组各自独立地用实验证明了^{[7.4][7.5]}能用棱镜高效率地激发介质光波导中的光导波。

7.2.1 工作原理和 m-线光谱学

棱镜—波导耦合系统的结构如图 7.1 所示,它是用一折射率高于波导薄膜的三角棱镜压在介质平板波导上构成的。在棱镜的底部和波导薄膜的表面之间有一层很窄的空气间隙。从激光器射来的光束进入棱镜后,在棱镜底部发生全反射,在空气间隙中产生迅衰场。由于空气间隙层很薄,约有几分之一一个激光波长,因此迅衰场的尾部可以到达空气—薄膜界面,由于反射作用,在空气—薄膜界面形成一相反的迅衰场。正是由于这两个相反方向的迅衰场的相互作用,才使人射光耦合进波导。当然,这一过程是可逆的,即介质波导中的导模功率也能转化为棱镜介质中的空间光束,这就是导模与辐射模之间的能量交换过程。类比于量子力学中微观粒子穿透势垒的行为,这个过程称为光学隧道效应。实际上,由于光波导的标量波动方程类似于薛定谔方程,折射率分布相当于势函数。折射率高的部分相当于势阱,而折射率低的部分相当于势垒,因此光波导可用图 7.2 所示的势阱来类比。由于势阱两边的势垒伸展于无限远,光波导的能量只能约束在势阱中。

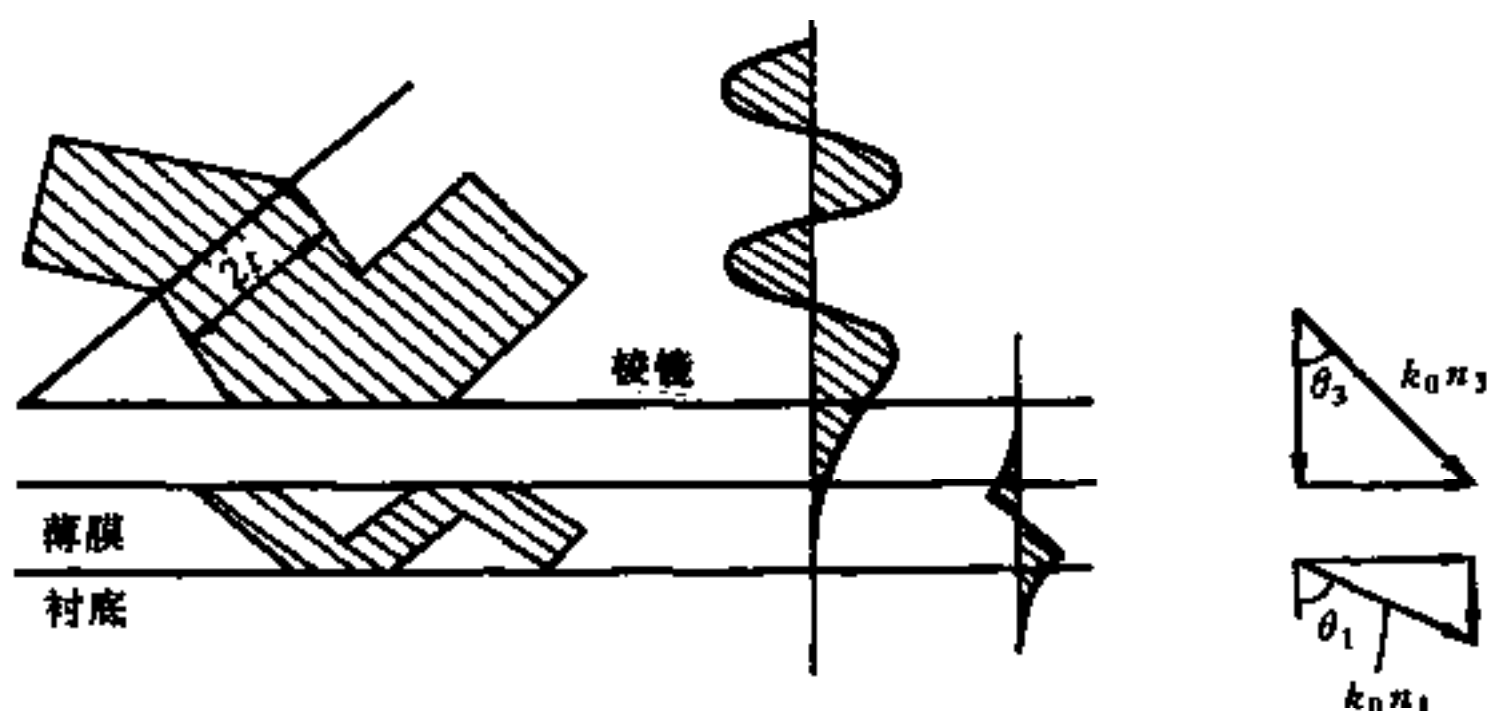


图 7.1 棱镜—波导耦合系统

图 7.3 所示的棱镜—波导耦合系统则不然,由于棱镜的折射率高

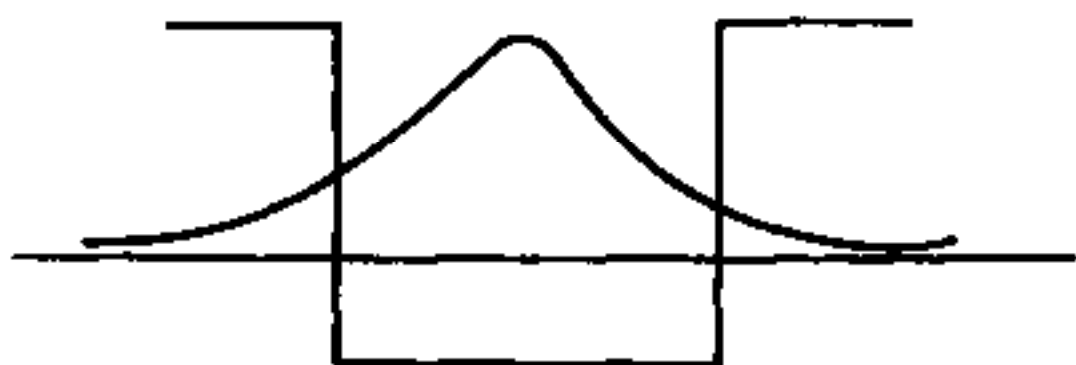


图 7.2 光波导的势阱模型

于波导薄膜,故棱镜介质和波导薄膜中的光波能量可通过光学隧道互相耦合。但是,值得注意的是上述耦合效应不是在任何情况下都会发生的,只有在满足相位匹配的条件下才能发生。这就要求棱镜中沿 z 轴方向的光波波矢必须与波导中导波的传播常数相等,即必须满足:

$$k_0 n_3 \sin \theta_3 = \beta \quad (7.1)$$

上式也称为同步条件, θ_3 称为同步角。

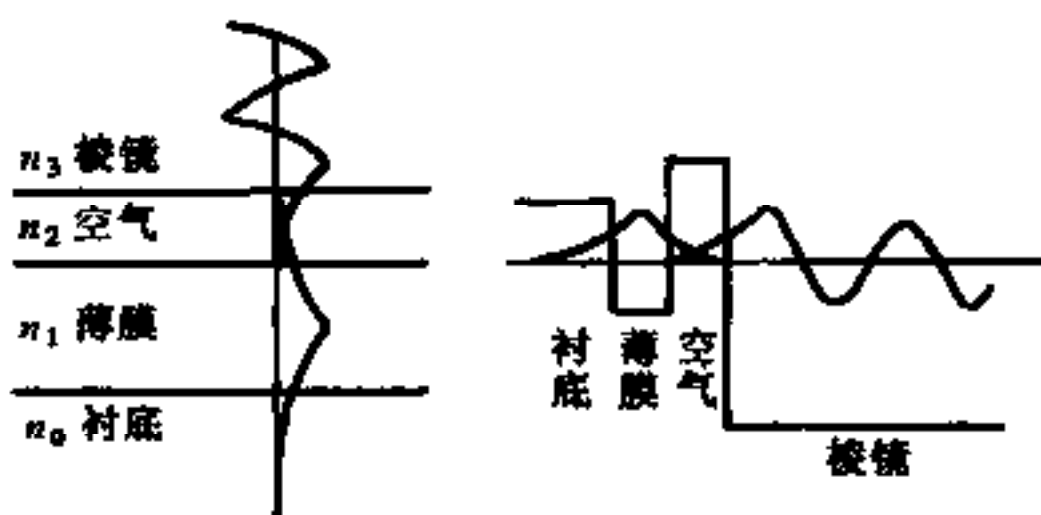


图 7.3 棱镜—波导耦合系统与势阱模型

图 7.4 是田炳耕^[7.6]等用来观察 m -线的实验装置。在这个实验中,用一等腰棱镜使激光束从一腰耦合进光波导,然后从另一腰耦合输出,右方屏幕用来显示从棱镜输出的光。实验者调节入射激光束的方向,使得同步条件得以满足,在波导中激发出某一导模。由于实际波导决不可能是理想的,总是存在光散射,于是这个导模的部分能量被耦合进其他的导模,这些导模将以不同的方向耦合出棱镜。每一个模式都有它自己的、满足同步条件的输出角,因此,在屏幕上可看到一组亮线,这些亮线是波导模式的精彩显示。测量这些模式的同步角,并利用波导的模式本征方程,可计算波导薄膜的折射率和厚度,这种技术叫做

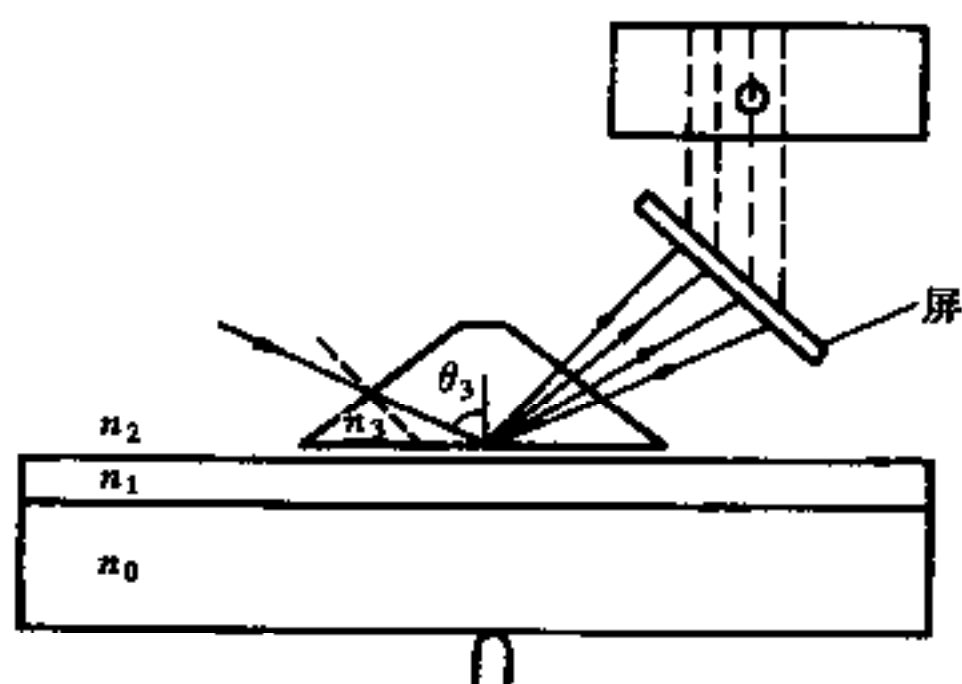


图 7.4 观察 m 线的实验装置

m-线光谱法。

7.2.2 棱镜—波导耦合系统的色散方程

考虑图 7.5 所示的棱镜—波导耦合系统的光线图。相对于波导薄膜来说,棱镜可看作为无穷大介质。如前所述,由于棱镜的折射率高于波导薄膜,故该系统是一典型的泄漏波导。因此,在波导中传播模式的能量是逐渐衰减的。故不存在真正的导模,只有当空气间隙 s 足够大时,从波导中向外辐射的能量很少,导模的功率衰减很慢,故仍然可认为这种衰减模是导模,或称为“伪导模”。实际上,可将这种棱镜—波导耦合系统看作为自由波导的微扰系统。其意义是由于棱镜的存在而使自由波导的模式本征方程发生变化。可以推断,这种微扰系统的模式本征值一定是复量,其实部代表传播常数,而虚部代表振幅衰减系数。下面用转移矩阵技术推导这种泄漏波导的色散方程和模式本征值相对

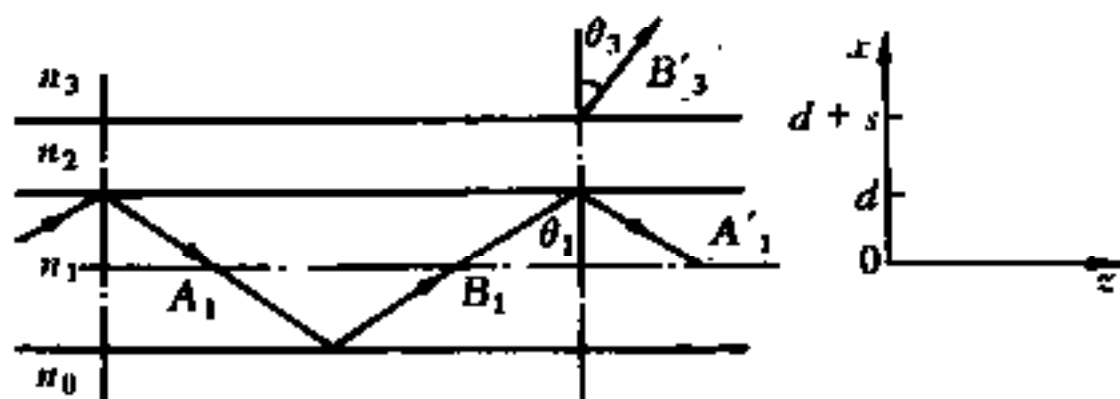


图 7.5 棱镜—波导耦合系统的光线图

自由波导的变化^[7.7]。

在以下的分析中,对符号的下标作如下规定:数字3代表棱镜介质中的物理量;2代表空气间隙中的物理量;1代表薄膜中的物理量;而0代表衬底介质中的物理量。若用两个数作下标,则代表相应的两种介质界面上的物理量。另外,设波导薄膜厚度为 $2d$,空气间隙的厚度为 s 。为简单计,以下只讨论TE波。

如图7.5所示选择坐标系。假设电磁场在 y 方向是均匀的,同时设电磁场的传播因子为 $\exp[i(\beta z - \omega t)]$,则电磁场满足的波动方程为

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + (k_0^2 n_j^2 - \beta^2) E_y = 0 \quad (j = 0, 1, 2, 3) \quad (7.2)$$

根据棱镜—波导耦合系统的物理图像,可写出各个区域的电场分布为

$$E_y(x) = \begin{cases} B'_3 e^{ik_3(x-d-s)} & (d+s < x < +\infty) \\ B_2 e^{-p_2(x-d)} + A_2 e^{p_2(x-d)} & (d < x < d+s) \\ B_1 e^{-\kappa_1(x-d)} + A_1 e^{\kappa_1(x-d)} & (-d < x < d) \\ B_0 e^{p_0(x+d)} & (-\infty < x < -d) \end{cases} \quad (7.3)$$

把式(7.3)代入方程(7.2),可得

$$\left. \begin{aligned} \kappa_3 &= (k_0^2 n_3^2 - \beta^2)^{1/2} \\ \kappa_1 &= (k_0^2 n_1^2 - \beta^2)^{1/2} \\ p_2 &= (\beta^2 - k_0^2 n_2^2)^{1/2} \\ p_0 &= (\beta^2 - k_0^2 n_0^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

为计算方便,引入下列符号:

$$\left. \begin{aligned} \tan \phi_{10} &= \frac{p_0}{\kappa_1} \\ \tan \phi_{12} &= \frac{p_2}{\kappa_1} \\ \tan \phi_{32} &= \frac{p_2}{\kappa_3} \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

式中, $-2\phi_{10}$ 和 $-2\phi_{12}$ 分别为薄膜衬底和薄膜—空气界面上的全反射

相移;而 $-2\phi_{32}$ 可看作棱镜—空气界面上的全反射相移。

根据转移矩阵理论,容易得到以下矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} E_y(-d) \\ E'_y(-d) \end{bmatrix} = M_1 \cdot M_2 \begin{bmatrix} E_y(d+s) \\ E'_y(d+s) \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

式中

$$M_1 = \begin{bmatrix} \cos(2\kappa_1 d) & -\frac{1}{\kappa_1} \sin(2\kappa_1 d) \\ \kappa_1 \sin(2\kappa_1 d) & \cos(2\kappa_1 d) \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

利用恒等式

$$\begin{cases} \sin(ix) = i \sinh(x) \\ \cos(ix) = \cosh(x) \end{cases} \quad (7.8)$$

可得

$$M_2 = \begin{bmatrix} \cosh(p_2 s) & -\frac{1}{p_2} \sinh(p_2 s) \\ -p_2 \sinh(p_2 s) & \cosh(p_2 s) \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

把式(7.7)和(7.9)代入方程(7.6),并利用(7.3)式,可得以下方程

$$(-p_0 \quad 1) M_1 M_2 \begin{bmatrix} 1 \\ i\kappa_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (7.10)$$

化简方程(7.10),可得棱镜—波导耦合系统的色散方程

$$2\kappa_1 d = m\pi + \phi_{10} + \phi'_{12}, (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.11)$$

式中

$$\phi'_{12} = \arctan\left(\frac{p'_2}{\kappa_1}\right) \quad (7.12)$$

而

$$\begin{aligned} p'_2 &= p_2 \frac{\sinh(p_2 s) - \frac{i\kappa_3}{p_2} \cosh(p_2 s)}{\cosh(p_2 s) - \frac{i\kappa_3}{p_2} \sinh(p_2 s)} = \\ &= p_2 \frac{1 + e^{-2i\phi_{32}} \cdot e^{-2p_2 s}}{1 - e^{-2i\phi_{32}} \cdot e^{-2p_2 s}} \end{aligned} \quad (7.13)$$

式(7.11)与自由波导的模式本征方程在形式上完全一致,而且由式(7.13)可知,当 $s \rightarrow \infty$ 时,有 $p'_2 \rightarrow p_2$,于是棱镜—波导耦合系统退化为自由波导,方程(7.11)则退化为自由波导的模式本征方程。

当空气间隙 s 足够大时,即在弱耦合情况下,如果满足条件:

$$e^{-2p_2 s} \ll 1 \quad (7.14)$$

则式(7.13)可近似为如下形式:

$$p'_2 \approx p_2(1 + 2e^{-2i\phi_{32}} \cdot e^{-2p_2 s}) \quad (7.15)$$

于是,利用微分公式可得

$$\begin{aligned} \phi'_{12} &= \arctan\left(\frac{p'_2}{\kappa_1}\right) = \\ &= \arctan\left(\frac{p_2}{\kappa_1}\right) + \frac{2p_2/\kappa_1}{1 + (p_2/\kappa_1)^2} e^{-2i\phi_{32}} \cdot e^{-2p_2 s} = \\ &= \phi_{12} + \sin 2\phi_{12} e^{-2i\phi_{32}} \cdot e^{-2p_2 s} \end{aligned} \quad (7.16)$$

因此,用微扰法处理棱镜—波导耦合系统时,式(7.11)可改写成

$$\begin{aligned} 2\kappa_1 d &= m\pi + \phi_{10} + \phi_{12} + \sin 2\phi_{12} e^{-2i\phi_{32}} \cdot e^{-2p_2 s} \\ (m &= 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (7.17)$$

由上式分析可知,只要知道棱镜—波导耦合系统的结构参数,即可根据式(7.11)~(7.13)严格算出该系统的传播常数。但实际上有意义的情况是弱耦合的泄漏波导系统,即只需考虑方程(7.17)即可。但式(7.17)是一个复杂的超越复数方程,需要在复平面上求解,对该系统的研究会带来一定的困难。但在弱耦合条件下,方程(7.17)右边第四项可作为小量处理,因而可采用微分方法,使问题大为简化。

7.2.3 传播常数的变化

若把自由波导的模式本征方程写成如下形式:

$$2\kappa_1^0 d = m\pi + \phi_{10}^0 + \phi_{12}^0, (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.18)$$

为区分自由波导和微扰波导两类结构的参数,式(7.18)中各参数的上标“0”表示属于自由波导。将式(7.17)和(7.18)两式相减,且由于

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 - \kappa_1^0 &= -\frac{\beta^0}{\kappa_1^0} \Delta\beta \\ \phi_{10} - \phi_{10}^0 &= -\frac{\beta^0}{p_0^0 \kappa_1^0} \Delta\beta \\ \phi_{12} - \phi_{12}^0 &= -\frac{\beta^0}{p_2^0 \kappa_1^0} \Delta\beta \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

由于方程(7.17)右边第四项可作为小量处理,故其中参数可用自由波导的参数代替,这种代替的意义是保留一阶小量,而忽略二阶小量。于是可得微扰波导相对于自由波导传播常数的变化为

$$\Delta\beta = -\frac{\kappa_1}{\beta(2d_{\text{eff}})} \sin 2\phi_{12} e^{-2i\phi_{32}} \cdot e^{-2p_2 s} \quad (7.20)$$

而

$$(2d)_{\text{eff}} = 2d + \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_2} \quad (7.21)$$

为简单计,在式(7.20)和(7.21)中,省略了表示自由波导参数的上标“0”。这表明,只要知道微扰系统的结构参数 n_3 和 s ,便可用自由波导的参数求出微扰系统相对于自由波导传播常数的变化 $\Delta\beta$ 。

根据式(7.20),可知 $\Delta\beta$ 是一复量,这与本节开始时的预计是一致的。容易得到 $\Delta\beta$ 的实部为

$$\text{Re}(\Delta\beta) = -\frac{\kappa_1}{\beta(2d_{\text{eff}})} \sin 2\phi_{12} \cdot \cos 2\phi_{32} e^{-2p_2 s} \quad (7.22)$$

$\text{Re}(\Delta\beta)$ 是微扰系统相对自由波导传播常数的修正值,而 $\Delta\beta$ 的虚部为

$$\text{Im}(\Delta\beta) = \frac{\kappa_1}{\beta(2d_{\text{eff}})} \sin 2\phi_{12} \cdot \sin 2\phi_{32} e^{-2p_2 s} \quad (7.23)$$

它表示导波振幅因泄漏而引起的衰减,故 $\text{Im}(\Delta\beta)$ 也可称为振幅衰减系数。由式(7.23)可见,耦合间隙越大,则衰减越小;反之, s 越小,则衰减越大。

根据上述分析可知,由 m -线光谱法得到的传播常数的测量值是 $\beta + \text{Re}(\Delta\beta)$,而需要测量的是自由波导的参数 β ,两者显然是不同的。由此可见,在不考虑其他测量误差情况下,由 m -线光谱法本身引起的

误差即为 $\text{Re}(\Delta\beta)$ 。只是在耦合间隙 s 较大, $e^{-2p_2s} \ll 1$, 使得 $\text{Re}(\Delta\beta)$ 小于测量精度的情况下, 才可认为由 m -线光谱法得到的测量值是精确的。

7.3 弯曲波导

在集成光路中, 光路方向的改变是一个不可避免的问题, 而光路方向的改变必然涉及到波导的弯曲。因此, 在导波光学中, 弯曲波导的研究已成为一个异常活跃的领域。光在弯曲波导中传输时, 因光波能量从波导弯曲处辐射到周围空间中而产生辐射损耗。这种损耗与波导参数有关, 在波导参量确定的情况下, 与弯曲波导的曲率半径密切相关, 曲率半径越小, 辐射损耗越大。所以, 在设计这类波导时, 曲率半径是需要首先考虑的参数。为了便于比较, 本节先介绍马库斯(Marcuse)的直波导等效法^[7.8], 然后用四层泄漏波导的理论处理波导的弯曲损耗, 最后利用保角变换, 把阶跃折射率分布的弯曲波导变换成渐变折射率分布的直波导, 再利用第 4 章的处理方法, 得到了理想的结果。

7.3.1 直波导等效法

非对称平板波导的弯曲损耗公式是由马库斯于 1971 年导出的, 他所用的近似理论可称为“直波导近似法”。这种方法的基础是, 利用圆柱坐标系描述弯曲波导。因此, 除了一个未确定的振幅因子和柱函数的阶数以外, 弯曲波导的场分布是已知的。在弯曲半径足够大的情况下, 如果用直波导相应区域的场去代替弯曲波导外侧附近的场分布, 就可确定这两个未知参数。利用这个近似解便可计算由于波导弯曲而引起的辐射损耗。

(1) 弯曲波导的场分布 考虑图 7.6 所示的非对称弯曲平板波导。设波导薄膜的厚度为 $2d$, 波导中心轴的弯曲半径为 R , 为简单起见, 这里仅限于讨论 TE 波, 采用极坐标 (ρ, θ) 系统, 径向距离 ρ 从曲率中心起算, 且假定与 (ρ, θ) 平面垂直的方向上场是均匀的。在波导外侧 $(R+d) < \rho < \infty$ 区域中, 麦克斯韦方程的解由下列各式给出:

$$E_y = BH_m^{(1)}(k_0 n_2 \rho) e^{i(m\theta - \omega t)} \quad (7.24)$$

$$H_\rho = B \frac{\omega \epsilon_0}{k_0^2} \frac{m}{\rho} H_m^{(1)}(k_0 n_2 \rho) e^{i(m\theta - \omega t)} \quad (7.25)$$

$$H_\theta = -iB \frac{n_2 \omega \epsilon_0}{k_0} H_m^{(1)'}(k_0 n_2 \rho) e^{i(m\theta - \omega t)} \quad (7.26)$$

式中, 第一类亨格尔(Hankel)函数和阶数 m 是图 7.6 所示柱坐标系统的麦克斯韦方程精确解, 上标“'”表示对宗量的一阶导数。

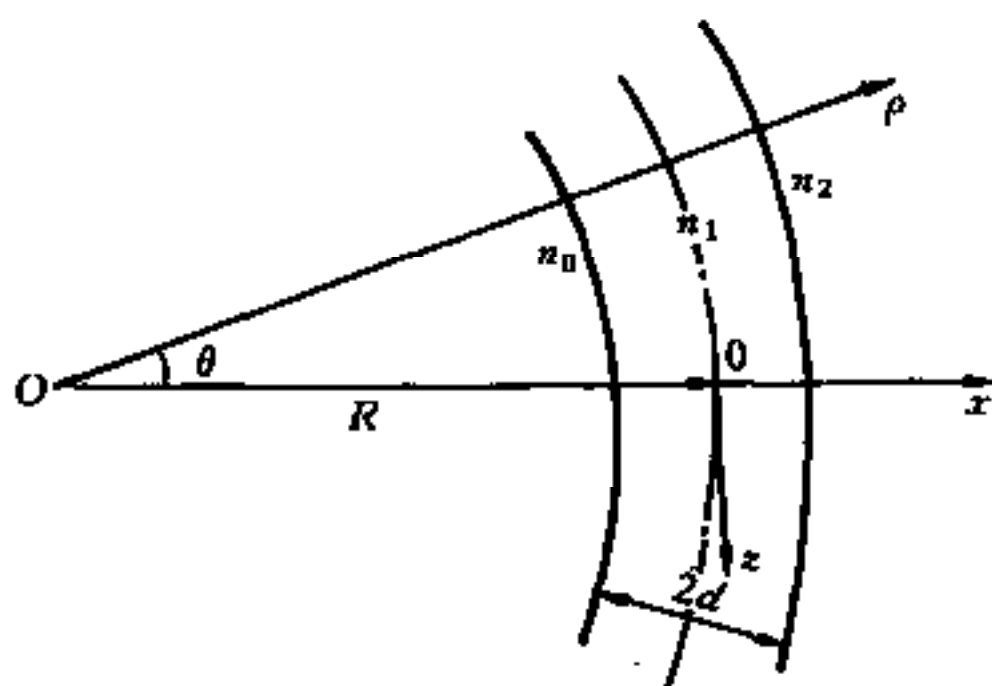


图 7.6 非对称弯曲平板波导

在波导薄膜($R-d < \rho < R+d$)中, 麦克斯韦方程的解是贝塞尔(Bessel)函数与诺伊曼(Neumann)函数的线性叠加; 而在波导内侧($0 < \rho < R-d$)区域, 由于存在奇点 $\rho=0$, 因此麦克斯韦方程的解只可能是贝塞尔函数。在弯曲波导中, 柱函数的阶数 m 不一定取整数, 因为这时不需要满足周期性的边界条件。

根据波导弯曲引起辐射损耗的定性分析, 可知在弯曲波导外侧, 电磁场必须满足以下两个要求:

①当 $\rho > R+d$, 但小于某个临界长度时, 场的形式必须是指数衰减函数;

②当 ρ 大于这一临界长度时, 场的形式必须是辐射函数。第一类亨格尔函数在时间变化因子为 $\exp(-i\omega t)$ 时恰好满足上述两个要求。

设弯曲波导附近的场可用直波导相应区域的场来近似。如果用直波导的坐标系统来描述弯曲波导, 则直波导系统的 z 轴是弯曲的, 于

是得到如下关系:

$$z = R\theta \quad (7.27)$$

函数 $\exp(im\theta)$ 等效于直波导的传播因子 $\exp(i\beta z)$, 由此可得

$$\beta = \frac{m}{R} \quad (7.28)$$

因为 R 远大于光波长, 故 m 是一个很大的数。为了建立振幅因子与导模携带功率之间的关系, 需对第一类亨格尔函数加以简化, 对于 $m > k_0 n_2 \rho$ 区域, 第一类亨格尔函数可近似为:

$$H_m^{(1)}(k_0 n_2 \rho) \approx i \frac{e^{m(a - \tanh a)}}{\sqrt{\frac{\pi}{2} m \tanh a}} \quad (7.29)$$

式中

$$\cosh a = \frac{m}{k_0 n_2 \rho} \quad (7.30)$$

而双曲正切函数由下式给出:

$$u = \tanh a = \frac{[\cosh^2 a - 1]^{1/2}}{\cosh a} = \left[\beta^2 - \left(k_0 n_2 \frac{\rho}{R} \right)^2 \right]^{1/2} / \beta \quad (7.31)$$

在波导轴附近, 利用近似式 $\rho/R \approx 1$, 以及 p_2 的定义式 (7.4) 和 (7.28), 可得如下关系

$$m \tanh a = p_2 R \quad (7.32)$$

上式给出了式 (7.29) 中分母的近似关系, 下面考虑该式中的指数函数, 为此采用 x 坐标系来表示离开波导薄膜中心轴的距离, 即有

$$\frac{\rho}{R} = 1 + \frac{x}{R} \quad (7.33)$$

利用式 (7.4) 和 (7.31), 得到

$$u \approx \left[p_2^2 - 2(k_0 n_2)^2 \frac{x}{R} \right]^{1/2} \cdot \frac{1}{\beta} \approx \frac{p_2}{\beta} \left[1 - \left(\frac{k_0 n_2}{p_2} \right)^2 \frac{x}{R} \right] \quad (7.34)$$

利用反双曲正切函数与自然对数之间关系, 可得

$$a = \operatorname{artanh} u = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+u}{1-u} \right) \quad (7.35)$$

再把对数函数展开为无限级数,得到

$$\alpha = u + \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7 + \dots \quad (7.36)$$

另外,根据式(7.34),可得近似

$$u^l = \left(\frac{p_2}{\beta}\right)^l - l \left(\frac{k_0 n_2}{p_2}\right)^2 \frac{x}{R} \left(\frac{p_2}{\beta}\right)^{l-1} \quad (7.37)$$

把式(7.37)代入(7.36),有

$$\alpha = \frac{p_2^2}{\beta} + \frac{1}{3} \left(\frac{p_2}{\beta}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{p_2}{\beta}\right)^5 + \dots - \left(\frac{k_0 n_2}{p_2}\right)^2 \frac{x}{R} \cdot \frac{p_2}{\beta} \left[1 + \frac{p_2^2}{\beta^2} + \left(\frac{p_2^2}{\beta^2}\right)^2 + \left(\frac{p_2^2}{\beta^2}\right)^3 + \dots \right] \quad (7.38)$$

上式中第一个级数可以用一个对数函数表示,第二部分中包含一个简单的几何级数,于是可得以下关系

$$\alpha = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1 + \frac{p_2}{\beta}}{1 - \frac{p_2}{\beta}} \right] - \frac{(k_0 n_2)^2}{p_2 \beta} \frac{1}{1 - \frac{p_2^2}{\beta^2}} \frac{x}{R} \quad (7.39)$$

利用式(7.34)和(7.39),容易得到

$$\alpha - \tanh \alpha = \alpha - u = \frac{1}{2} \left[\frac{1 + \frac{p_2}{\beta}}{1 - \frac{p_2}{\beta}} \right] - \frac{p_2}{\beta} - \frac{p_2}{\beta} \frac{x}{R} \quad (7.40)$$

根据近似关系式(7.28)、(7.29)、(7.32)和(7.40),可把电磁分量 E_y 写成

$$E_y = iB \frac{\exp \left\{ \left[\frac{1}{2} \frac{\beta}{p_2} \ln \left[\frac{1 + \frac{p_2}{\beta}}{1 - \frac{p_2}{\beta}} \right] - 1 \right] p_2 R \right\}}{\sqrt{\frac{\pi}{2} p_2 R}} e^{-p_2 x} \cdot e^{i\beta x} \quad (7.41)$$

在 $R \rightarrow \infty$ 的极限情况下,直波导 TE 模在 $d < x < \infty$ 区域中场的形式为

$$E_y = A e^{-p_2(x-d)} \quad (7.42)$$

式中,指数衰减场的振幅因子可以由场所携带的功率 P 来表示:

$$A = 2\kappa_1 \left[\frac{\omega\mu_0 P}{\beta \left(2d + \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_2} \right) (\kappa_1^2 + p_2^2)} \right]^{1/2} \quad (7.43)$$

由此可见,式(7.41)和(7.42)对坐标 x 的依赖关系是一致的。只是式(7.42)中省略了位相传播因子 $\exp(i\beta z)$ 。

在 R 很大的情况下,使弯曲波导外侧、靠近薄膜处的场近似用直波导相应区域的场来代替。比较式(7.41)和(7.42),并利用式(7.43),可以确定场的振幅系数

$$B = -2i\kappa_1 e^{p_2 d} \left[\frac{\left(\frac{\pi}{2} \right) \omega\mu_0 p_2 R P}{\beta \left(2d + \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_2} \right) (\kappa_1^2 + p_2^2)} \right]^{1/2} \cdot \exp \left\{ - \left[\frac{1}{2} \frac{\beta}{p_2} \ln \left(\frac{1 + \frac{p_2}{\beta}}{1 - \frac{p_2}{\beta}} \right) - 1 \right] p_2 R \right\} \quad (7.44)$$

对于远离波导薄膜 $\rho \gg R$ 的区域,第一类亨格尔函数可表示为大宗量的近似形式,于是,根据式(7.24)表示的场分量可写成

$$E_y = B \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 n_2 \rho}} e^{ik_0 n_2 \rho} \cdot e^{-i(2m+1)\pi/4} \cdot e^{i\beta z} \quad (7.45)$$

上式表明,在远离波导薄膜区域,弯曲波导和直波导的场是完全不同的。弯曲波导外侧的场由指数衰减形式变为完全辐射的形式,这种性质解释了弯曲波导因辐射而损失功率的原因。

(2) 弯曲损耗系数的公式 由于已经导出了远离波导薄膜处辐射场的具体形式,因此计算由辐射引起的功率损耗就比较容易。功率损耗系数是单位长度波导无限远处辐射场的功率贡献除以导模所承载的功率。即

$$2\alpha = \frac{L S_{\rho \rightarrow \infty}}{P} \quad (7.46)$$

因为 α 是振幅衰减系数,因此功率损耗系数应为 2α 。上式中 L 是图 7.7 中 A 、 B 两点的弧长, A 、 B 两点与曲率中心连线与波导中心轴的交点为 a 和 b , 设 a 、 b 之间的弧长为单位弧长。根据图 7.7 所示的几

何关系,显然有

$$L = \rho\theta = \frac{\rho}{R} \quad (7.47)$$

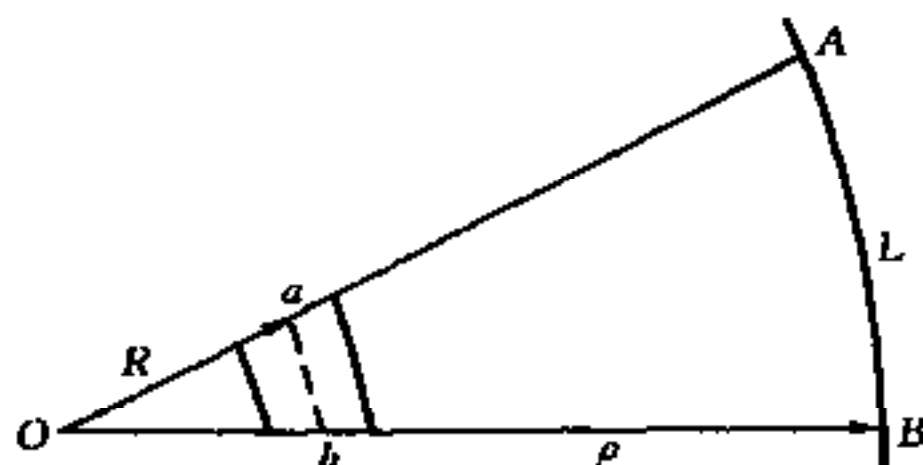


图 7.7 计算弯曲损耗的几何关系

功率密度矢量在 ρ 方向的分量为

$$S_\rho = -\frac{1}{2} E_y H_y^* = \frac{1}{2} n_2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |E_y|^2 \quad (7.48)$$

利用式(7.44)、(7.45)、(7.47)和(7.48),并根据式(7.46),可得功率损耗系数公式

$$2\alpha = \frac{2p_2 \kappa_1^2 e^{2p_2 d} \cdot e^{-U}}{k_0^2 (n_1^2 - n_2^2) \beta \left(2d + \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_2} \right)} \quad (7.49)$$

式中

$$U = \left[\frac{\beta}{p_2} \ln \left(\frac{1 + \frac{p_2}{\beta}}{1 - \frac{p_2}{\beta}} \right) - 2 \right] p_2 R \approx \frac{2}{3} \frac{p_2^3}{\beta^2} R \quad (7.50)$$

近似式(7.50)仅在 $p_2/\beta \ll 1$ 的情况下成立。另外,在推导式(7.49)过程中,已应用了关系式 $\kappa_1^2 + p_2^2 = k_0^2 (n_1^2 - n_2^2)$ 。需要注意的是,这里还应用了一个近似假设,即导模在弯曲波导中传播时,场的振幅不随坐标 z 变化,这个近似假设在一阶微扰理论中是典型的。

马卡提里(Marcatili)利用复本征方程的近似解计算弯曲损耗^[7.9]

的结果表明,两种理论的曲线符合得很好,但直波导等效法所得公式要比文献[7.9]的结果简单得多。另外,虽然本小节所采用的方法难以推广到介质圆柱波导(光纤)的弯曲损耗问题,但实验表明,如果用光纤波导的参数代替式(7.49)中平板波导的参数,则用该公式可计算弯曲光纤的功率损耗,并与实验结果相当一致^[7.10]。

7.3.2 四层波导近似法^{[7.11][7.12]}

非对称平板波导的弯曲损耗也可通过四层波导近似法处理。这种近似法的依据是第一类亨格尔函数在弯曲波导外侧靠近波导薄膜处,可用德拜(Debye)渐近表达式来代替,它是一个指数衰减函数和一个指数增长函数的线性叠加。这种函数形式表明,在该区域存在一个准光学界面,形成了一个光学隧道,从而引起波导能量的泄漏。在波导曲率半径很大的情况下,可用四层泄漏波导结构近似代替三层弯曲波导,而四层泄漏波导的辐射损耗是已经解决的问题。令人惊异的是,用四层波导近似法所得结果与直波导等效法的结果完全一致。

(1) 德拜近似表达式^[7.13] 考虑图 7.6 所示的非对称弯曲平板波导,本节仍采用极坐标 (ρ, θ) 系统。根据上节的分析,容易写出非对称弯曲平板波导三个区域中麦克斯韦方程的解,在仅考虑 TE 波的情况下,有

$$E_y = \begin{cases} B_0 J_m(k_0 n_0 \rho) e^{i(m\theta - \omega t)} & 0 < \rho < R - d \\ [B_1 J_m(k_0 n_1 \rho) + A_1 N_m(k_0 n_0 \rho)] e^{i(m\theta - \omega t)} & R - d < \rho < R + d \\ B_2 H_m^{(1)}(k_0 n_2 \rho) e^{i(m\theta - \omega t)} & R + d < \rho < \infty \end{cases} \quad (7.51)$$

当 R 很大,且满足 $d < x \ll R$ 时,即在弯曲平板波导的外侧附近,第一类亨格尔函数可用德拜渐近表达式^[7.12]

$$\exp[-p_2(x-d)] + A \exp[p_2(x-d)] \quad (7.52)$$

代替。式中

$$A = \frac{i}{2} \exp \left[2p_2 d - 2R \left(\beta \ln \frac{p_2 + \beta}{k_0 n_2} - p_2 \right) \right] \quad (7.53)$$

在 $0 < \rho < R - d$ 和 $R - d < \rho < R + d$ 区域内, 如果用直波导对应区域的场作为零级近似代替弯曲波导的场, 则式(7.51)可改写为

$$E_y = \begin{cases} B_0 e^{p_0(x+d)} & -\infty < x < -d \\ B_1 e^{-i\kappa_1(x-d)} + A_1 e^{i\kappa_1(x-d)} & -d < x < d \\ B_2 e^{-p_2(x-d)} + A_2 e^{p_2(x-d)} & d < x \ll R \end{cases} \quad (7.54)$$

根据式(7.52), 可知

$$\frac{A_2}{B_2} = A \quad (7.55)$$

由式(7.54)可以看出, 在 $x > d$, 但离波导外侧很近的区域内, 迅衰场因波导的弯曲而发生畸变, 变为两个方向相反的迅衰场的叠加。这说明该区域内存在着一个准光学界面。由于该界面的存在, 从而引起迅衰波的反射。而在这界面的外侧, 由上节分析可知是辐射场。由弯曲波导的场分布可知, 这种结构实际上构成了一个光学隧道, 说明了能量辐射的物理原因。

(2) 四层波导 考虑图 7.8 所示的四层结构的波导。光导波在折射率为 n_1 的介质中传播, 该介质层的厚度为 $2d$, 折射率为 n_2 的介质层厚度为 s ; 而折射率为 n_0 和 n_3 的介质的厚度为半无限大。设各介质的折射率满足关系

$$n_3 > n_1 > n_0 > n_2$$

容易看出, 该结构与棱镜—波导耦合系统的结构是完全一致的。因此, 在处理能量辐射问题时, 完全可利用棱镜—波导耦合系统的结果。

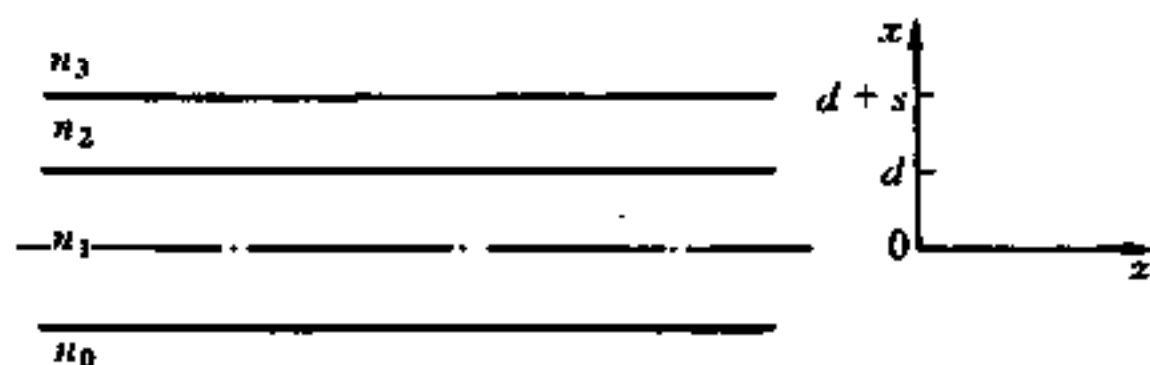


图 7.8 四层结构的泄漏波导

四层结构的场分布由式(7.3)给出, 而式中各参数的意义由式

(7.4)和(7.5)给出。

由 $E_y(x)$ 和 $\partial E_y(x)/\partial x$ 在 $x = s + d$ 处连续的条件, 可得如下关系:

$$\frac{A_2}{B_2} = -e^{-2p_2s} e^{-i2\phi_{32}} \quad (7.56)$$

另外, 该结构的振幅衰减系数由(7.23)式给出, 考虑到 ϕ_{12} 和 ϕ_{32} 的定义式(7.5), 则振幅衰减系数可写成如下形式:

$$\alpha = \text{Im}(\Delta\beta) = \frac{\kappa_1}{\beta(2d)_{\text{eff}}} \sin 2\phi_{12} \sin 2\phi_{32} e^{-2p_2s} = \frac{4\kappa_1^2 \kappa_3 p_2^2 e^{-2p_2s}}{(\kappa_1^2 + p_2^2)(\kappa_3^2 + p_2^2)(2d)_{\text{eff}}} \quad (7.57)$$

(3) 弯曲波导功率损耗系数的确定 由式(7.54)中的第三式可知, 如果两个指数函数的系数之比

$$A = -e^{-2p_2s} e^{-i2\phi_{32}} \quad (7.58)$$

则弯曲波导在三个区域中的场将完全与四层波导对应的三个区域中的场相一致。由上节的分析可知, 在 ρ 很大的情况下, 大宗量的第一类亨格尔函数由式(7.45)表示。这说明弯曲波导在 ρ 很大处是辐射场, 这也与四层波导在 n_3 介质中的场相类似。因此, 可以设想用四层结构的波导来等效弯曲波导, 这样, 就能自然地得到振幅衰减系数。但要把弯曲波导变换成四层结构的波导, 还必须确定参数 s 和 n_3 , 而这两个参数可由式(7.58)来确定。由式(7.53)和(7.58)可得

$$\frac{i}{2} \exp \left[2p_2d - 2R \left(\beta \ln \frac{p_2 + \beta}{k_0 n_2} - p_2 \right) \right] = -e^{-2p_2s} \cdot e^{-i2\phi_{32}} \quad (7.59)$$

根据两复数相等的原则, 可得到

$$\phi_{32} = \frac{\pi}{4} \quad (7.60)$$

和

$$\frac{1}{2} \exp \left[2p_2d - 2R \left(\beta \ln \frac{p_2 + \beta}{k_0 n_2} - p_2 \right) \right] = \exp(-2p_2s) \quad (7.61)$$

由式(7.5)和(7.60),可得

$$p_2 = \kappa_3 \quad (7.62)$$

由式(7.62)可确定 n_3 。

利用式(7.61),可得

$$-2p_2s = 2p_2d - 2R \left(\beta \ln \frac{p_2 + \beta}{k_0 n_2} - p_2 \right) - \ln 2 \quad (7.63)$$

利用式(7.4),有

$$\ln \frac{p_2 + \beta}{k_0 n_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{(p_2 + \beta)^2}{\beta^2 - p_2^2} = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1 + \frac{p_2}{\beta}}{1 - \frac{p_2}{\beta}} \right] \quad (7.64)$$

将式中对数展开为级数,可得

$$\frac{1}{2} \ln \left[\frac{1 + \frac{p_2}{\beta}}{1 - \frac{p_2}{\beta}} \right] = \frac{p_2}{\beta} + \frac{1}{3} \left(\frac{p_2}{\beta} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{p_2}{\beta} \right)^5 + \dots \quad (7.65)$$

在 $p_2 \ll \beta$ 的情况下,有

$$2 \ln \frac{p_2 + \beta}{k_0 n_2} \approx 2 \frac{p_2}{\beta} + \frac{2}{3} \left(\frac{p_2}{\beta} \right)^3 \quad (7.66)$$

将式(7.66)代入(7.63),可得

$$-2p_2s \approx 2p_2d - \frac{2}{3} \left(\frac{p_2}{\beta} \right)^2 p_2 R - \ln 2 \quad (7.67)$$

令

$$U = \frac{2}{3} \left(\frac{p_2}{\beta} \right)^2 p_2 R \quad (7.68)$$

则可得

$$-2p_2s = 2p_2d - U - \ln 2 \quad (7.69)$$

以上完成了由弯曲波导到四层波导的变换。只要把式(7.62)和(7.69)代入四层波导振幅衰减系数(7.57)式中,即可得到弯曲波导的振幅衰减系数

$$\alpha = \frac{p_2 \kappa_1^2 e^{2p_2 d} \cdot e^{-U}}{(\kappa_1^2 + p_2^2) \beta \left(2d + \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_2} \right)} \quad (7.70)$$

应用关系式

$$\kappa_1^2 + p_2^2 = k_0^2 (n_1^2 - n_2^2) \quad (7.71)$$

即可得到弯曲波导的功率损耗系数

$$2\alpha = \frac{2p_2 \kappa_1^2 e^{2p_2 d} \cdot e^{-U}}{k_0^2 (n_1^2 - n_2^2) \beta \left(2d + \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_2} \right)} \quad (7.72)$$

令人惊异的是, 四层波导近似法所得公式(7.72)与直波导等效法的结果(7.49)完全一致。

本节用场近似的方法, 把弯曲波导等效成四层结构的波导, 然后求出了弯曲波导的功率损耗系数。在这种近似方法中, 不需要推导场的振幅系数和波导携带的功率, 而且光波的振幅合乎情理地随着传输距离的增长而衰减。但在马库斯的近似理论中, 必须假设光波的振幅不随坐标 z 变化。

7.3.3 保角变换矩阵分析方法^[7.14]

这一节, 首先利用保角变换, 把阶跃折射率分布的弯曲波导, 变换成折射率渐变的直波导。由于对应弯曲波导外侧的折射率可高于波导中准模的有效折射率, 因而在该区域构成辐射场, 从而引起能量的泄漏。

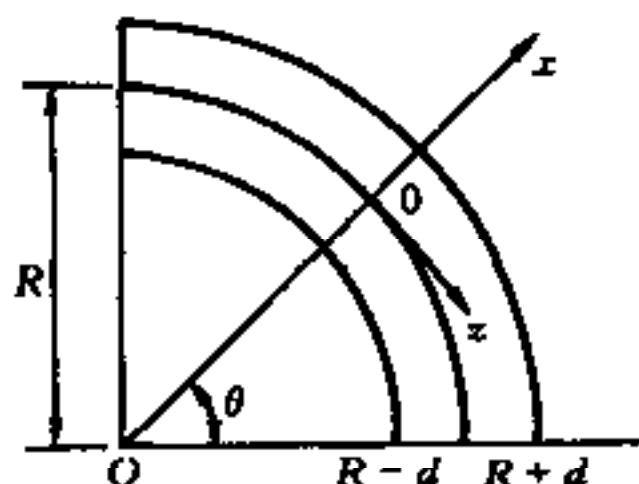


图 7.9 对称弯曲平板波导及坐标系统

同样有 $R\theta = z$, 而 $\psi(\rho)$ 满足

(1) 保角变换法 考虑图 7.9 所示的薄膜厚度为 $2d$ 的对称弯曲波导, 仍采用圆柱坐标 (ρ, θ) 系统, 假设标量波方程的解为

$$\psi(\rho, \theta) = \psi(\rho) e^{-i\theta R \theta} \quad (7.73)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\psi}{d\rho} \right) - \frac{\beta^2 R^2}{\rho^2} \psi + k_0^2 n^2(\rho) \psi = 0 \quad (7.74)$$

令

$$\psi = \rho^{1/2} u(\rho) \quad (7.75)$$

$$x = \rho - R \quad (7.76)$$

在 $R \gg d$ 的条件下, 方程(7.74)变成

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left[k_0^2 n^2(x) - \beta^2 \left(1 - \frac{2x}{R} \right) + \frac{1}{4R^2} \left(1 - \frac{2x}{R} \right) \right] u = 0 \quad (7.77)$$

构造一新的折射率分布

$$N^2(x) = n^2(x) + \frac{1}{4k_0^2 R^2} + \frac{2x}{R} \left(\frac{\beta^2}{k_0^2} - \frac{1}{4k_0^2 R^2} \right) \quad (7.78)$$

则方程(7.77)变为

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + [k_0^2 N^2(x) - \beta^2] u = 0 \quad (7.79)$$

于是, 弯曲波导的阶跃折射率分布 $n^2(x)$, 可用直波导的折射率分布 $N^2(x)$ 等效, 由图 7.10 可见, $N^2(x)$ 是线性分布函数。

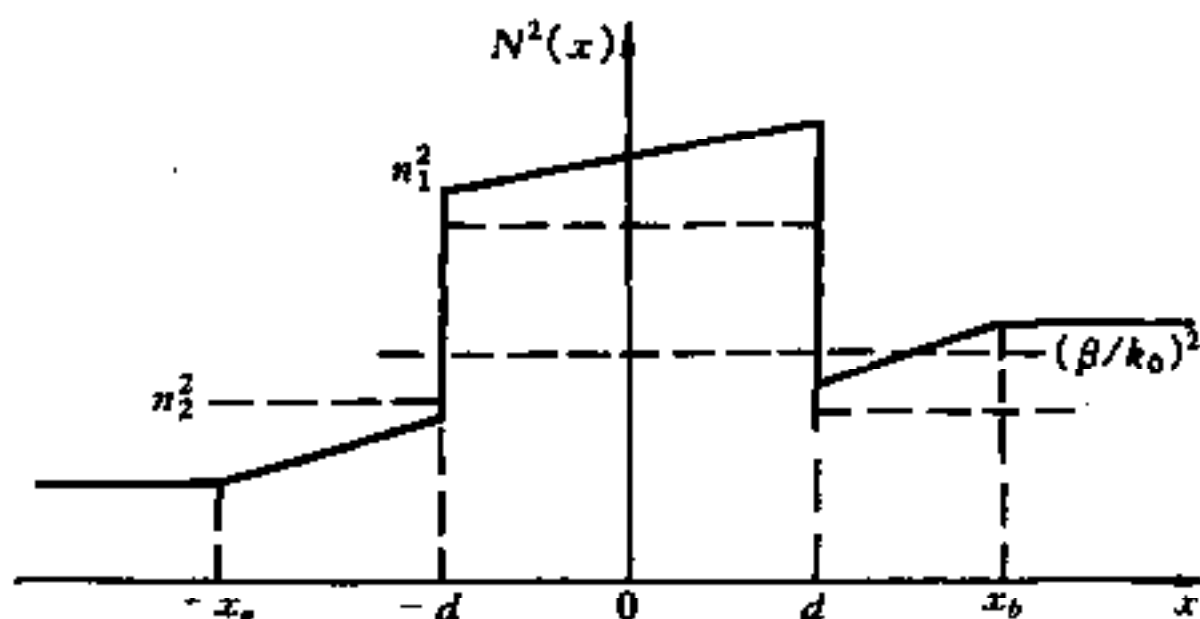


图 7.10 弯曲波导的等效折射率分布 $N^2(x)$ (实线)
与它的实际折射率分布 (虚线)

(2) 复本征方程的推导 为便于分析, 令 $-x_a$ 和 x_b 两点分别为等效折射率分布 $N^2(x)$ 的截断点, 假设当 $x < -x_a$ 时, $N^2(x) = N_a^2$; 而 $x > x_b$ 时, 有 $N^2(x) = N_b^2$ 。截断点选取的原则是离波导中心和转折点

x_t 足够远, 不会因截断点的选取而影响设定的精度要求。为了利用转移矩阵理论求解, 把区域 $(-x_a, -d)$ 、 $(-d, d)$ 和 (d, x_b) 分别分割成 l 、 m 和 n 等分, 每层的厚度均为 h 。对沿 z 方向传输的 TE 波, 假设电场分量为

$$E_y(x) = \begin{cases} A_a \exp[P_a(x + x_a)] & (x < -x_a) \\ A_b \exp[-P_b(x - x_b)] & (x > x_b) \end{cases} \quad (7.80)$$

式中

$$\begin{aligned} P_a &= (\beta^2 - k_0^2 N_a^2)^{1/2} \\ P_b &= (\beta^2 - k_0^2 N_b^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (7.81)$$

由于截断点选在转折点外, 即有 $N_b^2 > (\beta/k_0)^2$, 因此在 $x > x_b$ 区域, 场是辐射型的, 根据式(7.81), P_b 是虚数。当然, 可把式(7.80)中的衰减型函数改成辐射型函数, 但在推导过程中会带来一些麻烦, 不如用式(7.80)简洁。

根据转移矩阵理论, 可得矩阵方程

$$\begin{bmatrix} E_y(-x_a) \\ E'_y(-x_a) \end{bmatrix} = \left(\prod_{j=1}^l M_j \right) \left(\prod_{q=l+1}^{l+m} M_q \right) \left(\prod_{s=l+m+1}^{l+m+n} M_s \right) \begin{bmatrix} E_y(x_b) \\ E'_y(x_b) \end{bmatrix} \quad (7.82)$$

式中

$$M_j = \left\{ \begin{bmatrix} \cosh(a_j h) & -\frac{1}{a_j} \sinh(a_j h) \\ -a_j \sinh(a_j h) & \cosh(a_j h) \end{bmatrix} \right\} \quad (7.83)$$

$$a_j = [\beta^2 - k_0^2 N^2(x_j)]^{1/2}, (j = 1, 2, \dots, l)$$

$$M_q = \left\{ \begin{bmatrix} \cos(\kappa_q h) & -\frac{1}{\kappa_q} \sin(\kappa_q h) \\ \kappa_q \sin(\kappa_q h) & \cos(\kappa_q h) \end{bmatrix} \right\}$$

$$\kappa_q = [k_0^2 N^2(x_q) - \beta^2]^{1/2}, (q = l+1, l+2, \dots, l+m) \quad (7.84)$$

$$\left. \begin{aligned}
 M_s &= \begin{bmatrix} \cosh(\alpha_s h) & -\frac{1}{\alpha_s} \sinh(\alpha_s h) \\ -\alpha_s \sinh(\alpha_s h) & \cosh(\alpha_s h) \end{bmatrix} \\
 \alpha_s &= [\beta^2 - k_0^2 N^2(x_s)]^{1/2}, \\
 (s &= l+m+1, l+m+2, \dots, l+m+n)
 \end{aligned} \right\} \quad (7.85)$$

当 $x > x_l$ 时, 显然有 $\beta^2 < k_0^2 N^2(x_s)$, α_s 变为虚数。这时, 只要利用恒等式, $\sinh(ix) = i \sin x$, $\cosh(ix) = \cos x$, 把式(7.85)的矩阵换成适当的形式即可。

根据第4章中建立的方法, 在 l, m 和 $n \rightarrow \infty$ ($h \rightarrow 0$) 时, 可得以下较为简洁的方程

$$\int_{-d}^d \kappa dx + \Phi(s) = M\pi + \arctan\left(\frac{P_l}{\kappa_{l+1}}\right) + \arctan\left(\frac{P_{l+m+1}}{\kappa_{l+m}}\right) \quad (M = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.86)$$

其中 P_l 由下式确定

$$\left. \begin{aligned}
 P_j &= \alpha_j \frac{\sinh(\alpha_j h) + \frac{P_{j-1}}{\alpha_j} \cosh(\alpha_j h)}{\cosh(\alpha_j h) + \frac{P_{j-1}}{\alpha_j} \sinh(\alpha_j h)}, \quad (j = 1, 2, \dots, l) \\
 P_0 &= P_a
 \end{aligned} \right\} \quad (7.87)$$

P_{l+m+1} 由下式确定

$$\left. \begin{aligned}
 P_s &= \alpha_s \frac{\sinh(\alpha_s h) + \frac{P_{s+1}}{\alpha_s} \cosh(\alpha_s h)}{\cosh(\alpha_s h) + \frac{P_{s+1}}{\alpha_s} \sinh(\alpha_s h)} \\
 (s &= l+m+1, l+m+2, \dots, l+m+n) \\
 P_{l+m+n+1} &= P_b
 \end{aligned} \right\} \quad (7.88)$$

而散射子波的位置贡献为

$$\left. \begin{aligned}
 \Phi(s) &= \sum_{q=l+1}^{l+m+1} \left[\Phi_{q+1} - \arctan\left(\frac{\kappa_{q+1}}{\kappa_q} \tan \Phi_{q+1}\right) \right] \\
 \Phi_q &= \arctan\left(\frac{P_q}{\kappa_q}\right)
 \end{aligned} \right\} \quad (7.89)$$

由式(7.87)可知,由于 $a_j = (j = 1, 2, \dots, l)$ 始终是实数,故等效衰减系数 P_l 也是实数,说明在 $x < -d$ 区域,可用一指数衰减场等效。而在 $x > d$ 区域,情况稍有不同。在 $d < x < x_t$ 区域内 $a_s (s = l + m + 1, l + m + 2, \dots, l + m + n)$ 是实数,而在 $x > x_t$ 区域, a_s 是虚数,则由式(7.88)可推断, P_{l+m+1} 是复数。因此,模式本征方程(7.86)是一个复方程,所得模式本征值也是复数,其实部代表准模的传播常数(用 β_r 表示)。而虚部(用 Γ 表示)代表这种结构的泄漏,即波导的弯曲损耗。

(3) 数值比较 在方程(7.86)的推导过程中,唯一使用的近似是要求弯曲半径远大于波导本身的厚度,即 $R \gg d$,而该要求一般是容易实现的。为说明方程(7.86)的精确度,考虑以下参数表示的弯曲波导:

$$n(x) = \begin{cases} n_1 = 1.503 & |x| < d \\ n_2 = 1.500 & |x| > d \end{cases} \quad (7.90)$$

$$d = 2\mu m, \lambda_0 = 1\mu m$$

在各种不同的弯曲半径下,计算弯曲损耗,并与高精度的爱里函数数值方法^[7.15]、Marcuse 的直波导近似法^[7.8]和 Takuma 方法^[7.16]作了比较,结果由表 7.1 给出。由表 7.1 可见,方程(7.86)给出的结果与高精度的爱里函数数值计算结果完全一致。这说明了本节建立的方法的有效。

表 7.1 归一化的弯曲损耗和有效折射率

R/d	$2\Gamma d$				
	β_r/k_0	Airy function	Present	Marcuse	Takuma
0.5×10^4	1.501 637 705	9.10×10^{-5}	9.10×10^{-5}	1.24×10^{-4}	1.31×10^{-4}
0.7×10^4	1.501 615 377	8.62×10^{-6}	8.62×10^{-6}	1.07×10^{-5}	1.10×10^{-5}
0.9×10^4	1.501 606 677	7.76×10^{-7}	7.76×10^{-7}	9.18×10^{-7}	9.26×10^{-7}
1.0×10^4	1.501 604 253	2.30×10^{-7}	2.30×10^{-7}	2.69×10^{-7}	2.70×10^{-7}
1.1×10^4	1.501 602 492	6.82×10^{-8}	6.82×10^{-8}	7.90×10^{-8}	7.85×10^{-8}
1.3×10^4	1.501 600 151	5.93×10^{-9}	5.93×10^{-9}	6.80×10^{-9}	6.67×10^{-9}
1.5×10^4	1.501 598 704	5.13×10^{-10}	5.13×10^{-10}	5.85×10^{-10}	5.67×10^{-10}

参考文献

- [7.1] P. K. Tien. Revs. Modern Phys. , 1977, 49(2): 361~420.
- [7.2] H. Osterberg, L. w. Smith. J. Opt. Soc. Am. , 1964, 54: 1078.
- [7.3] A. Otto. Z. Phys. , 1968, 216: 398.
- [7.4] J. H. Harris, R. Shubert. Conf. Abstracts, URSI (Int. Sci. Radio Union) Spring Meeting, Washington, D. C. , 1969. 71.
- [7.5] P. K. Tien, R. Ulrich, R. J. Martin. Appl. Phys. Letters, 1969, 14: 291.
- [7.6] P. K. Tien, R. Ulrich. , R. J. Martin. Research Conference on Electron Devices, Rochester, New York, 1969.
- [7.7] Z. Cao, L. Qiu, . et. al, Chin. Phys. Lett. , 1999, 16(6): 413~414.
- [7.8] D. Marcuse. Bell Syst. Tech. J. , 1971, 50(8): 2551~2563.
- [7.9] E. A. J. Marcatili. Bell Syst. Tech. J. , 1969, 48(7): 2103~2133.
- [7.10] F. P. Kapron, D. B. Keck, R. D. Maurer. Appl. Phys. Lett. , 1970, 17(10): 423~425.
- [7.11] 曹庄琪, 方俊鑫. 上海交通大学学报, 1984, 18(3): 25~32.
- [7.12] 曹庄琪, 杨傅子, 方俊鑫. 光学学报, 1986, 6(7): 25~30.
- [7.13] L. Lewin. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. , 1974, MTT-22(7): 718~728.
- [7.14] Qing Liu, Zhuangqi Cao, et. al, Chin. Phys. Lett. , 2000, 17(5): 349~351.
- [7.15] K. Thyagarajan, M. R. Shenoy, . K. Ghatak. Opt. Lett. , 1987, 12(4): 296.
- [7.16] Takuma, M. Miyagi, Skawakami. Appl. Opt. , 1981, 29(13): 2291.

第 8 章 金属薄膜结构

8.1 引言

前几章介绍的介质光波导,其制作材料可以看作是理想的无损耗的电介质,而低损耗的射频传输线和微波波导一般是由金属线、金属条或金属管制成的。在低频条件下,金属可看作是理想的导体,虽然由于在紫外区域电子等离子体振荡的响应,使得金属无法在光频范围内仍然保持为良好的导体,但仍可以制成低损耗的金属波导和金属包覆介质波导。这是因为在这两类结构中,电磁场在金属中是以迅衰场形式存在的;另外,对一般的贵金属来说(如金、银、铝等),在可见光和近红外区域,其复介电常数的实部相对其虚部来说,往往是一个较大的负数。即有

$$\epsilon = \epsilon_r + i\epsilon_i, \quad \epsilon_r < 0, \quad |\epsilon_r| \gg \epsilon_i \quad (8.1)$$

金属的这种光学性质,使金属和介质的界面处可传输表面等离子波,使夹于两介质中间的金属薄膜可传输长程表面等离子波。这两类表面波具有不同于光导波的独特性质,例如,有效折射率的存在范围大、具有场的增强效应等。金属薄膜中表面波的传输不仅丰富了传统导波光学的研究内容,还使金属介质波导不仅在集成光电子领域,而且在非线性光学和生物分子学等领域获得日益广泛的应用。

本章首先讨论金属与介质界面处传输的表面等离子波,在此基础上,再分析金属薄膜结构中传输的长程表面等离子波。最后讨论激发这两类表面波的衰减全反射方法,并简单介绍表面等离子波的应用。

8.2 金属与介质界面中的表面等离子波(SPW)

8.2.1 表面等离子波的存在条件

考虑图 8.1 所示的两种半无限大、各向同性介质构成的简单界面。

设表面等离子波沿 z 轴方向传播, 取 x 轴沿界面法向, 零点取在界面处。 $x > 0$ 处为介质 1, 其介电常数为 $\epsilon_1(\omega)$; $x < 0$ 处为介质 2, 其介电常数为 $\epsilon_2(\omega)$ 。设两种介质都是非磁介质, 即有 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ 。



图 8.1 两种半无限大介质构成的简单界面
根据麦克斯韦方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (8.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (8.3)$$

消去磁场矢量后可得

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = 0 \quad (8.4)$$

式中, $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon(\omega) \mathbf{E}$, $\epsilon(\omega)$ 为相对介电常数。

根据表面波场强集中于界面, 并沿法向指数衰减的特点, 设试探解为

$$\left. \begin{aligned} E_1(\mathbf{r}, t) &= E_1^0 \exp(-\alpha_1 x) \cdot \exp[i(\beta z - \omega t)] \quad (x > 0) \\ E_2(\mathbf{r}, t) &= E_2^0 \exp(\alpha_2 x) \cdot \exp[i(\beta z - \omega t)] \quad (x < 0) \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

把式(8.5)代入方程(8.4), 并利用

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

可得

$$\left. \begin{aligned} E_1(x) &= \left(\frac{i\beta}{\alpha_1} E_{1x}^0, E_{1y}^0, E_{1z}^0 \right) \exp(-\alpha_1 x) \quad (x > 0) \\ E_2(x) &= \left(-\frac{i\beta}{\alpha_2} E_{2x}^0, E_{2y}^0, E_{2z}^0 \right) \exp(\alpha_2 x) \quad (x < 0) \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

为简单计, 上面式子中已省略了传播因子:

$$\exp[i(\beta z - \omega t)]$$

衰减系数 α_1 和 α_2 分别为

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^2 &= \beta^2 - k_0^2 \epsilon_1 \\ \alpha_2^2 &= \beta^2 - k_0^2 \epsilon_2 \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

同样,可得到磁场的表达式

$$\left. \begin{aligned} H_1(x) &= \frac{i}{\omega \mu_0} \left(i\beta E_{1y}^0, \frac{k_0^2 \epsilon_1}{\alpha_1} E_{1x}^0, \alpha_1 E_{1y}^0 \right) \exp(-\alpha_1 x) \quad (x > 0) \\ H_2(x) &= \frac{i}{\omega \mu_0} \left(i\beta E_{2y}^0, -\frac{k_0^2 \epsilon_2}{\alpha_2} E_{2x}^0, -\alpha_2 E_{2y}^0 \right) \exp(\alpha_2 x) \quad (x < 0) \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

由边界条件,可得

$$E_{1y}^0 = E_{2y}^0 \quad (8.9)$$

$$E_{1x}^0 = E_{2x}^0 \quad (8.10)$$

$$\frac{\epsilon_1}{\alpha_1} E_{1x}^0 = -\frac{\epsilon_2}{\alpha_2} E_{2x}^0 \quad (8.11)$$

$$\alpha_1 E_{1y}^0 = -\alpha_2 E_{2y}^0 \quad (8.12)$$

由上述四式可得以下三个结论:

① 由于 α_1 和 α_2 都是正实数,则由式(8.9)和(8.12)可知

$$E_{1y}^0 = E_{2y}^0 = 0 \quad (8.13)$$

说明表面等离子波一定是 TM 波。

② 由式(8.10)和(8.11),可得

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (8.14)$$

说明表面等离子波只能存在于界面两侧介质的介电常数符号相反的情况。

③ 利用式(8.7)和(8.14),可得表面等离子波的有效折射率为

$$\frac{\beta}{k_0} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} \quad (8.15)$$

根据上述第二个结论可知,在图 8.1 所示的结构中,如果两种介质中有

一种是金属,由于金属介电常数的实部是负数,因此,这样的结构满足表面等离子波存在的条件。表面等离子波的电场分布如图 8.2 所示

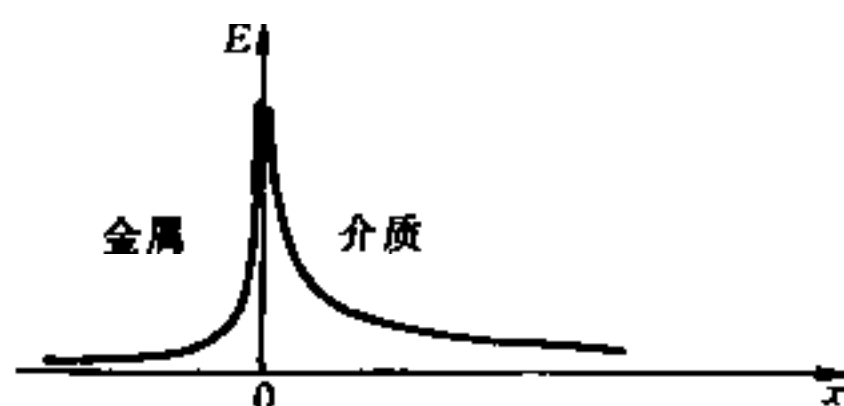


图 8.2 表面等离子波的电场分布

8.2.2 损耗

由于金属的介电常数是复数,其虚部表示对光能量的吸收。不失一般性,设图 8.1 所示结构中的介质 2 为金属,则有:

$$\epsilon_2 = \epsilon_{r2} + i\epsilon_{i2} \quad (\epsilon_{i2} > 0) \quad (8.16)$$

由于金属介电常数虚部的影响,将使表面等离子波的传播常数分为实部和虚部两部分,其中虚部表示表面等离子波的传输损耗。

下面考虑两种简单的情况。

① 如果 $\epsilon_{i2} = 0$, 这表明金属无吸收的情况(这在物理上是不现实的,但当 $|\epsilon_{r2}| \gg \epsilon_{i2}$, 可作为一种近似)。这时有 $\epsilon_2 = \epsilon_{r2}$, 而且在通常情况下,有 $|\epsilon_{r2}| > \epsilon_1$, 于是,表面等离子波的传播常数为

$$\beta_r = k_0 \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_{r2}}{\epsilon_1 + \epsilon_{r2}}} \quad (8.17)$$

$$\beta_i = 0 \quad (8.18)$$

由于传播常数是纯实数,导致衰减系数 α_1 和 α_2 也是纯实数,可分别表示为

$$\alpha_1 = k_0 \epsilon_1 \sqrt{\frac{1}{|\epsilon_{r2}| - \epsilon_1}} \quad (8.19)$$

$$\alpha_2 = k_0 |\epsilon_{r2}| \sqrt{\frac{1}{|\epsilon_{r2}| - \epsilon_1}} \quad (8.20)$$

② 如果 $\epsilon_{i2} \neq 0$, 这时 β 、 α_1 和 α_2 都是复数,利用式(8.15)可得严

格的解析公式

$$\beta_r = k_0 \left[\frac{\epsilon_1}{(\epsilon_1 + \epsilon_{r2})^2 + \epsilon_{i2}^2} \right]^{1/2} \cdot \left[\frac{\epsilon_e^2 + (\epsilon_e^4 + \epsilon_1^2 \epsilon_{i2}^2)^{1/2}}{2} \right]^{1/2} \quad (8.21)$$

$$\beta_i = k_0 \left[\frac{\epsilon_1}{(\epsilon_1 + \epsilon_{r2})^2 + \epsilon_{i2}^2} \right]^{1/2} \cdot \frac{\sqrt{2} \epsilon_{i2} \epsilon_1}{2 [\epsilon_e^2 + (\epsilon_e^4 + \epsilon_1^2 \epsilon_{i2}^2)^{1/2}]^{1/2}} \quad (8.22)$$

式中

$$\epsilon_e^2 = \epsilon_{r2}^2 + \epsilon_{i2}^2 + \epsilon_1 \epsilon_{r2} \quad (8.23)$$

在通常情况下,金属介电常数满足 $\epsilon_{r2} < 0$, $|\epsilon_{r2}| \gg \epsilon_{i2}$ 和 $|\epsilon_{r2}| > \epsilon_1$, 则复杂的(8.21)和(8.22)两式可近似为如下形式:

$$\beta_r \approx k_0 \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_{r2}}{\epsilon_1 + \epsilon_{r2}}} \quad (8.24)$$

$$\beta_i \approx k_0 \frac{\epsilon_{i2} \epsilon_1}{2 \epsilon_{r2} (\epsilon_1 + \epsilon_{r2})} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_{r2}}{\epsilon_1 + \epsilon_{r2}}} \quad (8.25)$$

由式(8.24)和(8.25)可知, $\beta_r > k_0 \sqrt{\epsilon_1}$, 而 β_i 正比于 ϵ_{i2} 。另外,与式(8.17)比较可知,忽略金属介电常数的虚部,实际上仅是略去了表面等离子波的损耗特性,而对表面等离子波的其他特性则无丝毫影响。

8.2.3 表面等离子波的激发

由上节的分析可知,金属和介质的界面满足表面等离子波存在的条件。奥托(Otto)^[8.1]和克莱切曼(Kretschmann)^[8.2]等研究了金属和介质界面处表面等离子波的光学激励问题。他们采用了如图8.3所示的棱镜耦合方式,在这两种方式中,棱镜材料的折射率必须足够大,从而可通过调整在棱镜底面的入射角,使人射光(TM波)在界面方向的波矢分量等于表面等离子波的波矢。调整间隙或金属膜的厚度 d ,即能有效地激励这种表面等离子波,从而使大部分入射光的能量耦合到表面等离子波中,而由棱镜底面的全反射光强明显地下降,形成一个吸收峰。这种激励方式称为衰减全反射(Attenuated Total Reflection

ATR)技术。

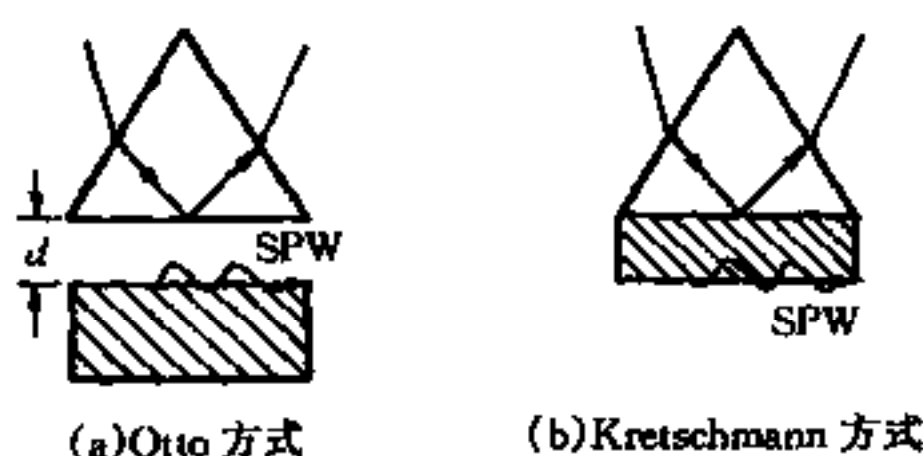


图 8.3 SPW 的棱镜耦合激发方式

下面以克莱切曼方式为例,推导这种实验结构下的反射率公式。考虑图 8.4 所示的实际结构和坐标系。设棱镜和介质的介电常数分别为 ϵ_2 和 ϵ_0 , 金属薄膜的介电系数为 $\epsilon_1 = \epsilon_{r1} + i\epsilon_{i1}$, 薄膜厚度为 d 。表面等离子

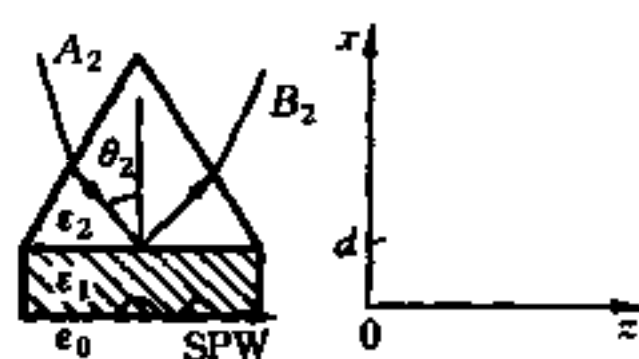


图 8.4 实际的 ATR 结构

波沿 z 方向传播,在棱镜底面上的光线入射角为 θ_2 。根据表面等离子波的性质,可设磁场分布为:

$$H_y(x) = \begin{cases} A_2 e^{a_2(x-d)} + B_2 e^{-a_2(x-d)} & x > d \\ A_1 e^{a_1 x} + B_2 e^{-a_1 x} & 0 < x < d \\ A_0 e^{a_0 x} & x < 0 \end{cases} \quad (8.26)$$

式中,

$$\begin{aligned} a_j &= (\beta^2 - k_0^2 \epsilon_j)^{1/2} \quad (j = 0, 1, 2,) \\ \beta &= k_0 \sqrt{\epsilon_2} \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (8.27)$$

由于在棱镜中,光场呈振荡形式,因此 a_2 是虚数。而在金属薄膜中,由于 ϵ_1 是复数,故 a_1 也是复数。利用 TM 波的 H_y 和 $\frac{1}{\epsilon} H'_y$ 在 $x=0$ 和 $x=d$ 处连续的条件,可得反射率公式

$$R = \left| \frac{B_2}{A_2} \right|^2 = \left| \frac{\gamma_{12} + \gamma_{01} e^{-2a_1 d}}{1 + \gamma_{12} \gamma_{01} e^{-2a_1 d}} \right|^2 \quad (8.28)$$

式中,

$$\gamma_{01} = \frac{\epsilon_0 \alpha_1 - \epsilon_1 \alpha_0}{\epsilon_0 \alpha_1 + \epsilon_1 \alpha_0} \quad (8.29)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\epsilon_1 \alpha_2 - \epsilon_2 \alpha_1}{\epsilon_1 \alpha_2 + \epsilon_2 \alpha_1} \quad (8.30)$$

在确定了实验结构及有关参数之后,就可利用公式(8.28)计算反射率 R 与入射角 θ_2 之间的关系曲线。图 8.5 给出了一个具体例子,其中 $\epsilon_0 = 1.0$, $\epsilon_1 = -18.0 + i0.7$, $\epsilon_2 = 3.24$, $d = 50.0 \text{ nm}$, $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ 。由图可见,当入射角 θ_2 为一特定值 θ_{ATR} 时,反射率 R 达到最小值,这时入射光线在 z 方向的波矢分量正好等于表面等离子波的传播常数 β_{ATR} ,表面等离子波被光激发,入射光的能量转移到金属薄膜与介质的界面上。ATR 曲线的半宽度反映了能量的耗散,即由金属介电系数的虚部引起的能量的吸收。

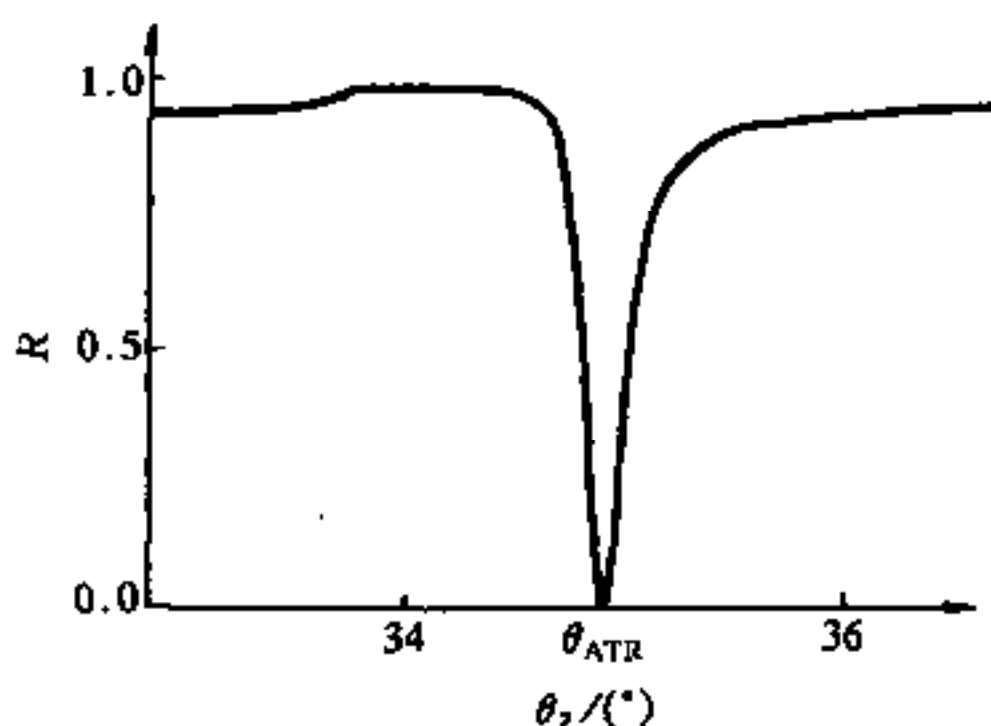


图 8.5 衰减全反射(ATR)曲线

由于金属薄膜的介电常数和厚度是与实验条件有关的参量,因此在实验中,往往需要通过测量确定这两个参数。目前常用的方法为双波长激发法^[8.3],即用两种波长的激光进行实验,可得到两个不同的 ATR 衰减峰,然后通过计算机拟合确定金属介电系数的实部、虚部和厚度。作者曾提出更换与金属接触的介质的办法^[8.4],同样得到了理想的结果。

表面等离子波也可经金属表面的光栅激发,这种激发方式更有利

于器件的小型化和平面化。

8.2.4 场的增强效应

表面等离子波是约束在金属和介质截面上传播的一种电磁波,其场强随离开界面的距离按指数规律衰减。因此,表面等离子波在界面上具有最强的场。以克莱切曼激发方式为例,设棱镜的折射率 $n_2 = 1.515$,厚度为 45nm 的银膜的介电系数 $\epsilon_1 = -17.3 + i0.68$,而空气的折射率 $n_0 = 1.0$,则通过计算,可得如图 8.6 所示的表面等离子波的电场分布。若以棱镜中的入射场归一,则可得 $|E_x|$ 的增强幅度为 18.8 倍,而 $|E_z|$ 的增强幅度为 4.2 倍,坡印廷矢的增强幅度可达 335.4 倍。由于这种场的增强效应,使表面等离子波在生物学、化学、材料学以及仪器等学科中获得了广泛的应用。

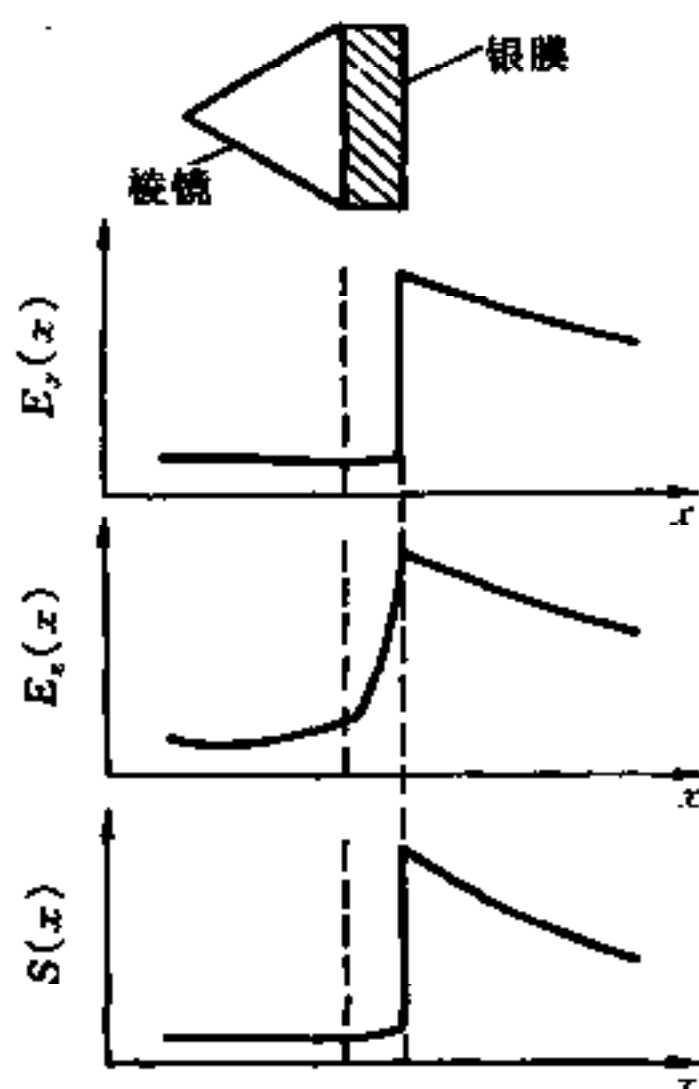


图 8.6 Kretschmann 激发方式中场的增强效应

8.3 金属薄膜结构

8.3.1 色散关系

考虑图 8.7 所示的金属薄膜结构, 1 区和 3 区为无吸收介质, 介电常数分别为 ϵ_1 和 ϵ_3 。2 区是厚度为 d 的金属薄膜, 其介电常数为 $\epsilon_2 = \epsilon_{r2} + i\epsilon_{i2}$, 且满足, $\epsilon_{i2} < 0$, $|\epsilon_{r2}| \gg \epsilon_{i2}$ 和 $|\epsilon_{r2}| > \epsilon_1, \epsilon_3$ 。为便于分析, 先构造一无损耗的理想系统, 在这系统中 $\epsilon_2 = \epsilon_{r2}$, 而 $\epsilon_{i2} = 0$ 。下面分别讨论非对称和对称结构。

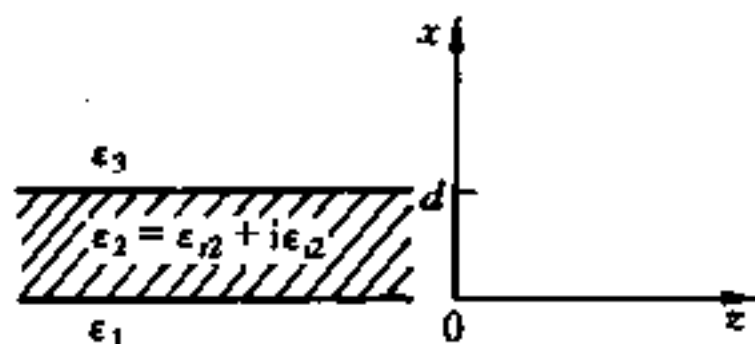


图 8.7 金属薄膜结构

(1) 非对称结构 考虑在金属薄膜结构中沿 z 方向传输的 TM 波, 三个区域中的场分布为

$$H_y(x) = \begin{cases} A_1 e^{\alpha_1^0 x} & x < 0 \\ A_2 e^{\alpha_2^0 x} + B_2 e^{-\alpha_2^0 x} & 0 < x < d \\ B_3 e^{-\alpha_3^0 (x-d)} & x > d \end{cases} \quad (8.31)$$

上标(0)表示为理想系统的参数, 式中

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^0 &= (\beta^{02} - k_0^2 \epsilon_1)^{1/2} \\ \alpha_2^0 &= (\beta^{02} - k_0^2 \epsilon_2)^{1/2} \\ \alpha_3^0 &= (\beta^{02} - k_0^2 \epsilon_3)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (8.32)$$

根据转移矩阵理论, 可得如下矩阵方程

$$\begin{bmatrix} H_y(0) \\ \frac{1}{\epsilon_1} H_y'(0) \end{bmatrix} = \mathbf{M}_2 \begin{bmatrix} H_y(d) \\ \frac{1}{\epsilon_3} H_y'(d) \end{bmatrix} \quad (8.33)$$

式中

$$M_2 = \begin{bmatrix} \cosh(\alpha_2^0 d) & -\frac{\epsilon_2}{\alpha_2^0} \sinh(\alpha_2^0 d) \\ -\frac{\alpha_2^0}{\epsilon_2} \sinh(\alpha_2^0 d) & \cosh(\alpha_2^0 d) \end{bmatrix} \quad (8.34)$$

利用式(8.31),在方程(8.33)中代入边界条件,则矩阵方程可改写为

$$\left(-\frac{\alpha_1^0}{\epsilon_1} \quad 1 \right) M_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\alpha_3^0}{\epsilon_3} \end{bmatrix} = 0 \quad (8.35)$$

化简上式,可得理想金属薄膜结构的色散方程为

$$\tanh(\alpha_2^0 d) = -\frac{\frac{\epsilon_2 \alpha_1^0}{\epsilon_1 \alpha_2^0} + \frac{\epsilon_2 \alpha_3^0}{\epsilon_3 \alpha_2^0}}{1 + \frac{\epsilon_2 \alpha_1^0}{\epsilon_1 \alpha_2^0} \cdot \frac{\epsilon_2 \alpha_3^0}{\epsilon_3 \alpha_2^0}} \quad (8.36)$$

(2) 对称结构 当 $\epsilon_1 = \epsilon_3$ 时,式(8.36)可简化为

$$\tanh(\alpha_2^0 d) = -\frac{2 \frac{\epsilon_2 \alpha_1^0}{\epsilon_1 \alpha_2^0}}{1 + \left(\frac{\epsilon_2 \alpha_1^0}{\epsilon_1 \alpha_2^0} \right)^2} \quad (8.37)$$

方程(8.37)可分为两支:

① $\left| \frac{\epsilon_2 \alpha_1^0}{\epsilon_1 \alpha_2^0} \right| < 1$ 的对称模,对应于式(8.31),式中 $B_2/A_2 > 0$,其色散方程为

$$\tanh\left(\frac{1}{2} \alpha_2^0 d\right) = -\frac{\epsilon_2 \alpha_1^0}{\epsilon_1 \alpha_2^0} \quad (8.38)$$

② $\left| \frac{\epsilon_2 \alpha_1^0}{\epsilon_1 \alpha_2^0} \right| > 1$ 的反对称模,对应 $B_2/A_2 < 0$,其色散方程为

$$\tanh\left(\frac{1}{2} \alpha_2^0 d\right) = -\frac{\epsilon_1 \alpha_2^0}{\epsilon_2 \alpha_1^0} \quad (8.39)$$

由式(8.38)和(8.39)可知,当 $d \rightarrow \infty$ 时,两式同时满足关系

$$\frac{\alpha_1^0}{\alpha_2^0} = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (8.40)$$

与式(8.14)比较可知,这时,对称模和反对称模约化为金属与介质界面上的表面等离子波,两者是简并的,它们的传播常数为

$$\beta^0 = k_0 \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} \quad (8.41)$$

由于 d 为无穷大,这两支表面波是自由的,相互间没有影响。

当 d 逐渐减小时,两支表面波将相互耦合,成为完全不同的对称模和反对称模。为便于分析,考虑 $d \rightarrow 0$ 的极限情况,这时有两种结果:

1) 由对称模的色散方程(8.38)可知,这时 $\alpha_1^0 = 0$, 对应 $\beta^0 = k_0 \sqrt{\epsilon_1}$ 。

2) 由反对称模的色散方程(8.39)可知,这时 α_1^0 和 α_2^0 同时趋向无穷大,对应 $\beta^0 \rightarrow \infty$ 。

根据上述分析,可得如图 8.8 所示的色散曲线,显然对一有限的金属薄膜厚度 d 分别有 β_1^0 (对称解)和 β_2^0 (反对称解)与之对应。对称解的取值范围为

$$k_0 \sqrt{\epsilon_1} < \beta_1^0 < k_0 \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} \quad (8.42)$$

而反对称解的取值范围为

$$k_0 \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} < \beta_2^0 < \infty \quad (8.43)$$

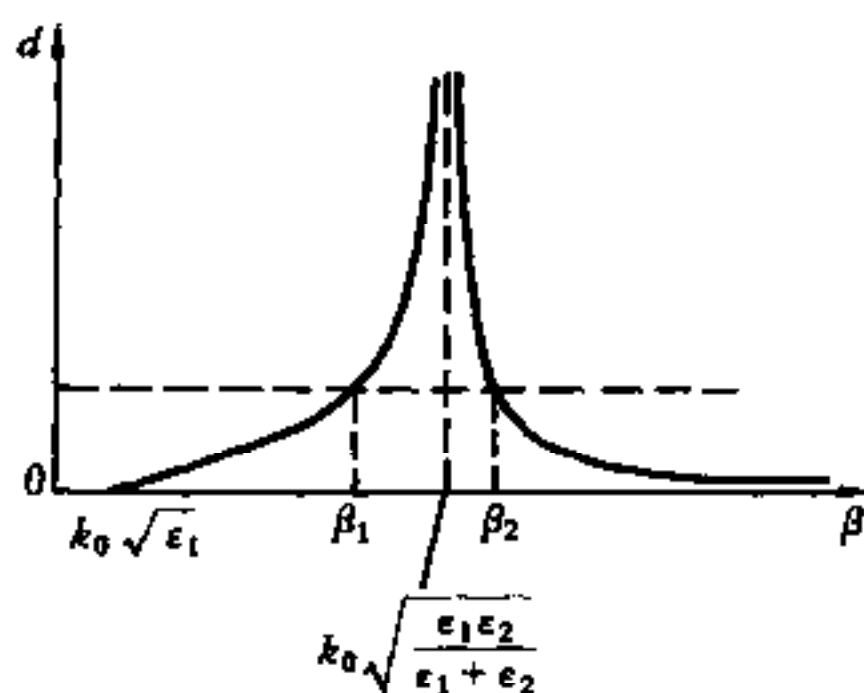


图 8.8 对称金属薄膜结构 SPW 的色散关系

8.3.2 损耗

本节讨论金属薄膜结构的损耗特性。由于金属介电常数在光频范围的特点,可采用第7章中建立的一阶微扰理论来处理金属薄膜结构的损耗问题。其主要思想是把普通的金属薄膜结构(由复介电常数表征)看作是理想金属薄膜结构(由实介电常数表征)的微扰系统,导出理想系统传播常数的微扰,微扰传播常数的虚部就是传播模的损耗系数。

(1) 非对称金属薄膜结构 根据上节的分析,当 $\epsilon_2 = \epsilon_{r2} + i\epsilon_{i2}$ 时,非对称金属薄膜结构的色散方程为

$$\tanh(\alpha'_2 d) = - \frac{\frac{\epsilon_2 \alpha_1}{\epsilon_1 \alpha'_2} + \frac{\epsilon_2 \alpha_3}{\epsilon_3 \alpha'_2}}{1 + \frac{\epsilon_2 \alpha_1}{\epsilon_1 \alpha'_2} \cdot \frac{\epsilon_2 \alpha_3}{\epsilon_3 \alpha'_2}} \quad (8.44)$$

式中

$$\begin{aligned} \alpha'_2 &= \sqrt{\beta^2 - k_0^2(\epsilon_{r2} + i\epsilon_{i2})} \approx \\ &\sqrt{\beta^2 - k_0^2 \epsilon_{r2}} - i\epsilon_{i2} \frac{k_0^2}{2\sqrt{\beta^2 - k_0^2 \epsilon_{r2}}} = \\ &\alpha_2 - i\epsilon_{i2} \frac{k_0^2}{2\alpha_2} = \alpha_2 - \Delta\alpha_2 \end{aligned} \quad (8.45)$$

为讨论方便,把方程(8.44)改写为

$$\alpha'_2 d + \phi'_{21} + \phi'_{23} = 0 \quad (8.46)$$

式中

$$\tanh \phi'_{21} = \frac{\epsilon_2 \alpha_1}{\epsilon_1 \alpha'_2} \quad (8.47)$$

$$\tanh \phi'_{23} = \frac{\epsilon_2 \alpha_3}{\epsilon_3 \alpha'_2} \quad (8.48)$$

利用式(8.45),可得

$$\tanh \phi'_{21} \approx \frac{\epsilon_{r2} \alpha_1}{\epsilon_1 \alpha_2} \left(1 + i\epsilon_{i2} \frac{2\alpha_2^2 + k_0^2 \epsilon_{r2}}{2\alpha_2^2 \epsilon_{r2}} \right) =$$

$$\tanh\phi_{21} + i\epsilon_{12} \frac{2\alpha_2^2 + k_0^2\epsilon_{12}}{2\alpha_2^2\epsilon_{12}} \cdot \frac{\epsilon_{12}\alpha_1}{\epsilon_1\alpha_2} \quad (8.49)$$

同理可得

$$\begin{aligned} \tanh\phi'_{23} &\approx \frac{\epsilon_{12}\alpha_3}{\epsilon_3\alpha_2} \left(1 + i\epsilon_{12} \frac{2\alpha_2^2 + k_0^2\epsilon_{12}}{2\alpha_2^2\epsilon_{12}} \right) = \\ &\tanh\phi_{23} + i\epsilon_{12} \frac{2\alpha_2^2 + k_0^2\epsilon_{12}}{2\alpha_2^2\epsilon_{12}} \cdot \frac{\epsilon_{12}\alpha_3}{\epsilon_3\alpha_2} \end{aligned} \quad (8.50)$$

由此可得

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{21} &= \frac{\tanh\phi'_{21} - \tanh\phi_{21}}{1 - \tanh^2\phi_{21}} = \\ &i\epsilon_{12} \frac{2\alpha_2^2 + k_0^2\epsilon_{12}}{2\alpha_2} \cdot \frac{\epsilon_1\alpha_1}{\epsilon_1^2\alpha_2^2 - \epsilon_{12}^2\alpha_1^2} \end{aligned} \quad (8.51)$$

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{23} &= \frac{\tanh\phi'_{23} - \tanh\phi_{23}}{1 - \tanh^2\phi_{23}} = \\ &i\epsilon_{12} \frac{2\alpha_2^2 + k_0^2\epsilon_{12}}{2\alpha_2} \cdot \frac{\epsilon_3\alpha_3}{\epsilon_3^2\alpha_2^2 - \epsilon_{12}^2\alpha_3^2} \end{aligned} \quad (8.52)$$

于是,微扰系统的色散方程可改写成

$$\alpha_2 d + \phi_{21} + \phi_{23} = \Delta\alpha_2 \cdot d - \Delta\phi_{21} - \Delta\phi_{23} \quad (8.53)$$

理想金属薄膜结构的色散方程(8.36)可改写为

$$\alpha_2^0 d + \phi_{21}^0 + \phi_{23}^0 = 0 \quad (8.54)$$

将式(8.53)和(8.54)两式相减,并利用微分公式,可得微扰传播常数

$$\Delta\beta = i\epsilon_{12} \frac{k_0^2 d_{\text{loss}}}{2\beta d_{\text{eff}}} \quad (8.55)$$

式中,金属薄膜的有效厚度定义为

$$d_{\text{eff}} = d + \frac{\epsilon_{12}\epsilon_1(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)}{\alpha_1(\epsilon_1^2\alpha_2^2 - \epsilon_{12}^2\alpha_1^2)} + \frac{\epsilon_{12}\epsilon_3(\alpha_2^2 - \alpha_3^2)}{\alpha_3(\epsilon_3^2\alpha_2^2 - \epsilon_{12}^2\alpha_3^2)} \quad (8.56)$$

而损耗距离

$$d_{\text{loss}} = d - \frac{2\alpha_2^2 + k_0^2\epsilon_{12}}{k_0^2} \left(\frac{\epsilon_1\alpha_1}{\epsilon_1^2\alpha_2^2 - \epsilon_{12}^2\alpha_1^2} + \frac{\epsilon_3\alpha_3}{\epsilon_3^2\alpha_2^2 - \epsilon_{12}^2\alpha_3^2} \right) \quad (8.57)$$

值得指出的是,(8.55)~(8.57)三式中的参数都是理想系统的参数,为

简便起见,上标(0)已被省略。这表明,只要利用方程(8.36)求出理想金属薄膜结构的传播常数,即可利用上述三式求出实际金属薄膜结构的微扰参数。由微扰传播常数的表达式(8.55)可以看出, $\Delta\beta$ 是纯虚数。这说明在一阶微扰近似下,金属介电常数的虚部仅影响金属薄膜结构的损耗特性,而对其他特性无丝毫影响。这个结论与8.2节的结果是一致的。

(2) 对称金属薄膜结构 在对称情况下,有 $\epsilon_1 = \epsilon_3$,微扰系统的色散方程可简化为

$$\tanh(\alpha'_2 d) = - \frac{2 \frac{\epsilon_2 \alpha_1}{\epsilon_1 \alpha'_2}}{1 + \left(\frac{\epsilon_2 \alpha_1}{\epsilon_1 \alpha'_2} \right)^2} \quad (8.58)$$

理想金属薄膜结构的色散方程由式(8.36)给出,微扰传播常数仍由式(8.55)表示,但(8.56)和(8.57)两式可分别改写为

$$d_{\text{eff}} = d + \frac{2\epsilon_{r2}\epsilon_1(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)}{\alpha_1(\epsilon_1^2\alpha_2^2 - \epsilon_{r2}^2\alpha_1^2)} \quad (8.59)$$

$$d_{\text{loss}} = d - \frac{2\alpha_2^2 + k_0^2\epsilon_{r2}}{k_0^2} \cdot \frac{2\epsilon_1\alpha_1}{\epsilon_1^2\alpha_2^2 - \epsilon_{r2}^2\alpha_1^2} \quad (8.60)$$

为研究对称模和反对称模的损耗特性,考虑 $d \rightarrow 0$ 的极限情况,把式(8.59)和(8.60)代入式(8.55),有

$$\begin{aligned} \Delta\beta \cong & -i\epsilon_{r2} \frac{\alpha_1^2(2\alpha_2^2 + k_0^2\epsilon_{r2})}{2\epsilon_{r2}(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)} = \\ & -i\epsilon_{r2} \frac{\alpha_1^2(2\alpha_2^2 + k_0^2\epsilon_{r2})}{2\epsilon_{r2} \cdot k_0^2(\epsilon_1 - \epsilon_{r2})} \end{aligned} \quad (8.61)$$

根据8.3.1节的分析,可得以下两个重要结论:

① 对于对称模,在 $d \rightarrow 0$ 时,有 $\alpha_1 \rightarrow 0$,由式(8.61)可知, $\Delta\beta \rightarrow 0$ 。在超薄金属结构中,这种损耗极小的对称模式称为长程表面等离子波(Long-Range Surface Plasma Wave)。表面等离子波前冠以“长程”两字,表明这种波相对普通表面等离子波可传输较长的距离。实际上,长程表面等离子波的传输距离难以达到毫米量级。

② 对于反对称模, 在 $d \rightarrow 0$ 时, α_1 和 α_2 同时趋向无穷大, 从而有 $\Delta\beta \rightarrow \infty$ 。由于损耗为无穷大, 表明这种反对称模在超薄金属波导中是不可能存在的。

8.3.3 长程表面等离子波的激发

长程表面等离子波也可通过棱镜激发, 萨利特(Sarid)^[8.5]首先从理论上提出这种长程表面等离子波可以存在于如图 8.7 所示的对称结构中($\epsilon_1 = \epsilon_3$)。稍后, 狄克(Deck)^[8.6]等人则提出用 ATR 技术从实验上激励这种长程表面等离子波。

激发长程表面等离子波的实验结构如图 8.9 所示。设棱镜的介电系数为 ϵ_3 , 介电系数为 $\epsilon_1 = \epsilon_{r1} + i\epsilon_{i1}$ 、厚度为 d_1 的金属薄膜夹在介电系数分别为 ϵ_0 和 ϵ_2 的两种介质中, 其中, 介质 2 的厚度为 d_2 , 而介质 0 的厚度为半无限大。设入射 TM 偏振光在棱镜底面与法线的夹角为

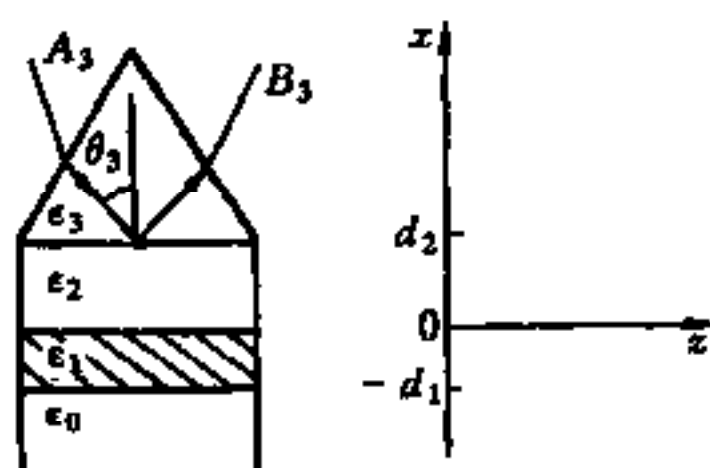


图 8.9 激发长程表面等离子波的实验结构

θ_3 。根据长程表面等离子波的性质, 可设磁场分布为

$$H_y(x) = \begin{cases} A_3 e^{a_3(x-d_2)} + B_3 e^{-a_3(x-d_2)} & x > d_2 \\ A_2 e^{a_2 x} + B_2 e^{-a_2 x} & 0 < x < d_2 \\ A_1 e^{a_1 x} + B_1 e^{-a_1 x} & -d_1 < x < 0 \\ A_0 e^{a_0(x+d_1)} & x < -d_1 \end{cases} \quad (8.62)$$

式中

$$\begin{aligned} a_j &= (\beta^2 - k_0^2 \epsilon_j)^{1/2} \quad (j = 0, 1, 2, 3) \\ \beta &= k_0 \sqrt{\epsilon_3} \sin \theta_3 \end{aligned} \quad (8.63)$$

由于在棱镜中光场呈振荡形式, 因此 a_3 是虚数。而在金属中, 由于 ϵ_1

是复数,故 α_1 也是复数,而 α_0 和 α_2 是实数。利用电磁场边界条件,可得反射率公式

$$R = \left| \frac{B_3}{A_3} \right|^2 = \left| \frac{\gamma_{23} + \gamma_{012} e^{-2\alpha_2 d_2}}{1 + \gamma_{23} \gamma_{012} e^{-2\alpha_2 d_2}} \right|^2 \quad (8.64)$$

式中

$$\gamma_{012} = \frac{\gamma_{12} + \gamma_{01} e^{-2\alpha_1 d_1}}{1 + \gamma_{12} \gamma_{01} e^{-2\alpha_1 d_1}} \quad (8.65)$$

$$\gamma_{23} = \frac{\epsilon_2 \alpha_3 - \epsilon_3 \alpha_2}{\epsilon_2 \alpha_3 + \epsilon_3 \alpha_2} \quad (8.66)$$

而

$$\gamma_{01} = \frac{\epsilon_0 \alpha_1 - \epsilon_1 \alpha_0}{\epsilon_0 \alpha_1 + \epsilon_1 \alpha_0} \quad (8.67)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\epsilon_1 \alpha_2 - \epsilon_2 \alpha_1}{\epsilon_1 \alpha_2 + \epsilon_2 \alpha_1} \quad (8.68)$$

对于图 8.9 所示的实验结构,只要确定了入射光的波长及实验结构参数,就可以利用上述公式计算反射率与入射角 θ_3 之间的关系曲线。图 8.10 给出了一个具体例子,有关参数分别为:

$\lambda = 632.8\text{nm}$, $\epsilon_0 = \epsilon_2 = 2.495$, $\epsilon_3 = 3.24$, $\epsilon_1 = -18.0 + i 0.7$, $d_1 =$

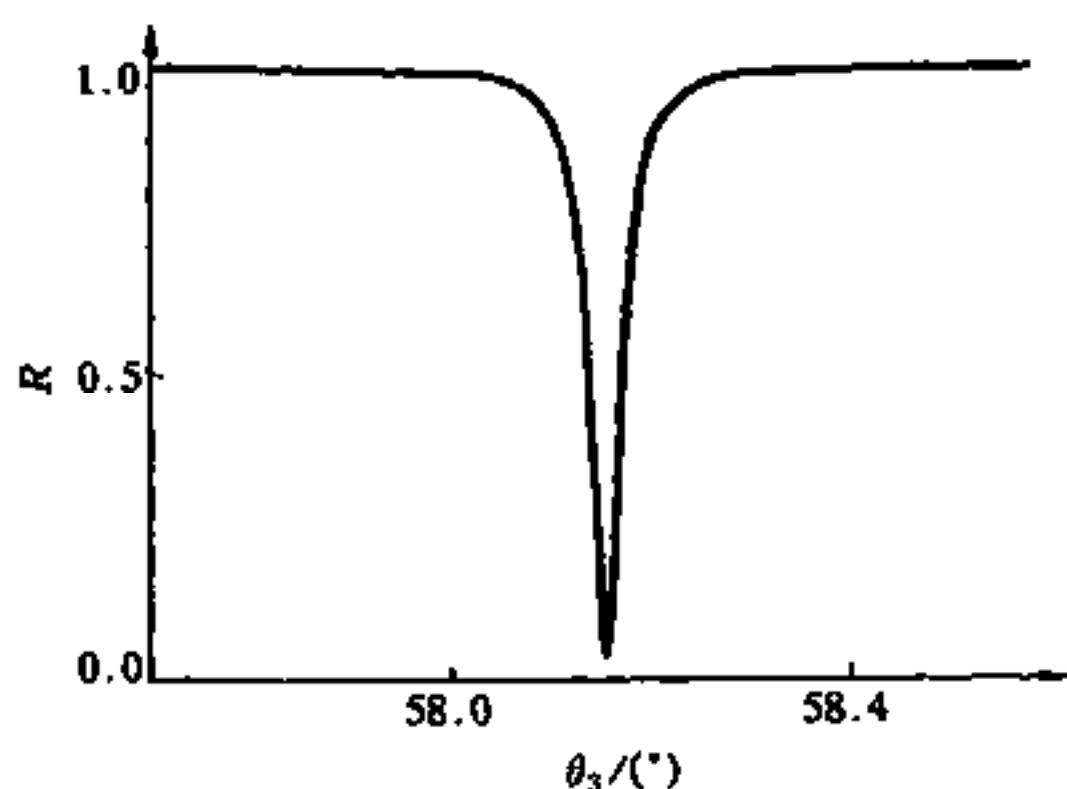


图 8.10 长程表面波的衰减全反射曲线

17nm , $d_2 = 1200\text{nm}$ 。图中给出的 ATR 衰减峰十分尖锐,说明长程表面等离子波的损耗很小,可以传输较长的距离。与图 8.5 所示的表面等离子波的 ATR 曲线比较,两者的半宽度几乎差一个数量级。

8.3.4 长程表面波场的增强效应

与单界面传输的表面等离子波不同,长程表面等离子波是由金属薄膜两个界面上的表面等离子波之间的耦合而产生的。这种耦合使场的强度在金属薄膜中的份额大大减小,而在金属介质界面上得到有效的增强。图 8.11(a)和(b)分别表示长程表面等离子波的场分布和坡印廷矢量分布。由图可见,在金属薄膜中,能量几乎为零,因而减小了它的损耗,所以长程表面等离子波能传输较长的距离。

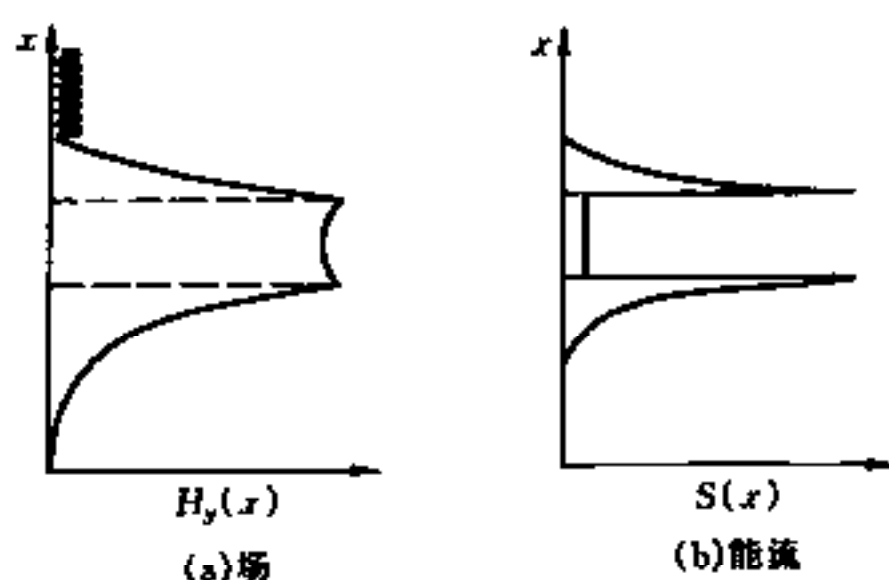


图 8.11 长程表面等离子波的场分布和能流(坡印廷矢)

8.4 表面等离子波的应用

在金属与介质界面传输的表面等离子波具有两个重要特点:

- ① 表面等离子波的波矢量是介质介电系数和厚度的灵敏函数。
- ② 表面等离子波具有场的增强效应。

由于具有以上特点,表面等离子波已在许多领域获得了广泛的应用。

8.4.1 免疫反应的实时测量^[8.7]

测定抗体和抗原分子结合的免疫反应是临床医学的重要手段。利用表面等离子波可进行免疫反应的实时测量。如图 8.12 所示,首先使抗原分子吸附在金属表面,并用 ATR 法测量该实验结构的反射率曲线,然后使金属表面接触带有抗体的溶液,当抗体与抗原结合时,与金属接触的介质的介电系数将发生变化,从而引起表面波波矢的改变,即引起反射率曲线的改变。由反射率曲线变化可了解免疫反应的充分程度。

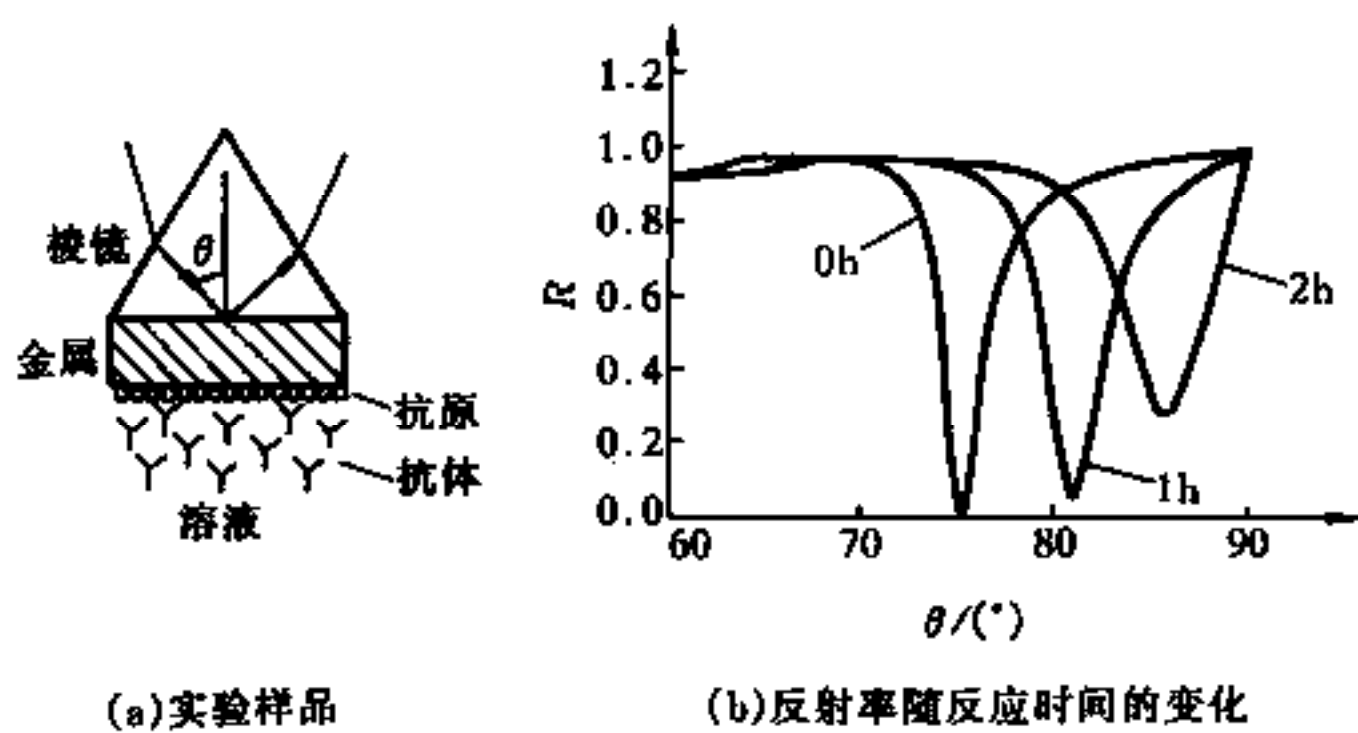


图 8.12 免疫反应的实时测量

利用上述原理也可观察液晶分子的趋向、LB 膜的生成等过程。

8.4.2 表面等离子波显微术^[8.8]

金属表面介质厚度的微小变化将引起表面等离子波波矢的变化，从而引起反射光强的改变。反之，可根据反射光的变化来观察金属表面的图像。图 8.13 是表面等离子波显微术的图像表示。在玻璃棱镜底面上镀 50nm 厚的银层，再在半边银层上涂一有机薄层。设 θ_0 为只有银层时的表面等离子波的激发角，而 θ_1 为有涂层时的激发角。当入射角为 θ_0 的平行光照射棱镜底面时，用屏观察反射光，可发现对比度明显的明暗两区域，明区表示无涂层，而暗区表示有涂层存在。用此方法可观察金属表面凹凸不平的涂层图像。

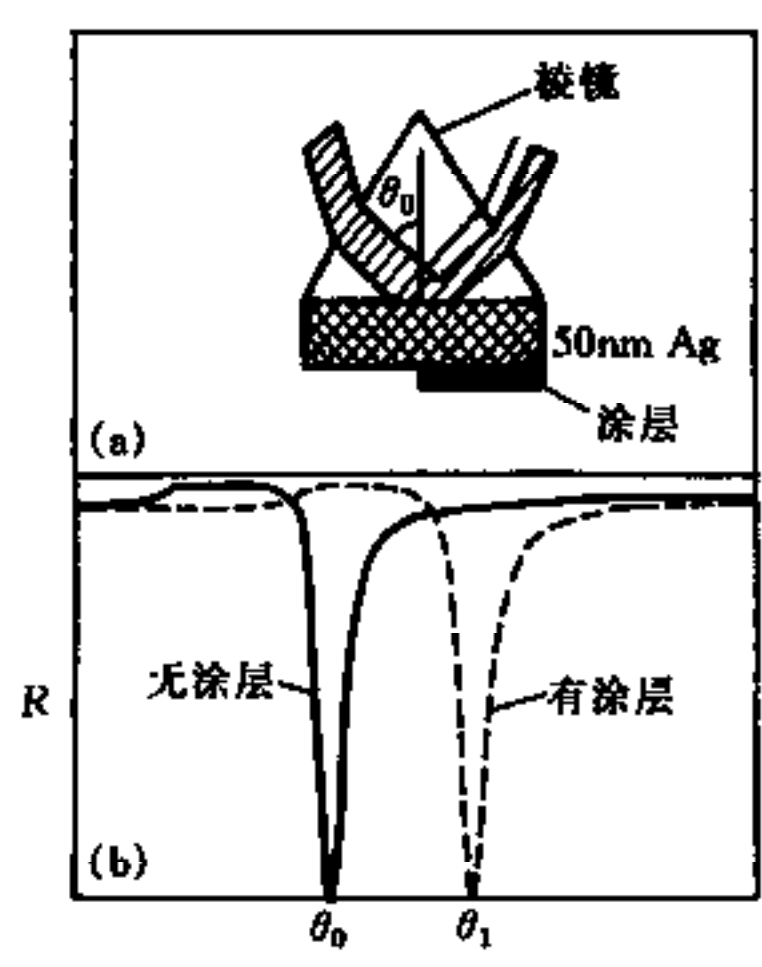


图 8.13 表面等离子波显微术的图像表示

(a) 样品配置; (b) 反射率曲线

8.4.3 表面增强的吸收^[8.9]

利用激光探测溶液中化学试剂

的分子浓度是医学、环保等领域的重要研究课题,而如何提高测量灵敏度则是制备这类传感器的关键。本节介绍利用表面等离子波场的增强效应提高吸收灵敏度的一种方法。考虑图 8.14(a)所示的棱镜、金属膜和样品配置。图中样品分别是纯水和受污染的水。根据表 8.1 中的参数,并利用式(8.28)计算,可得到如图 8.14(b)所示的反射率曲线。

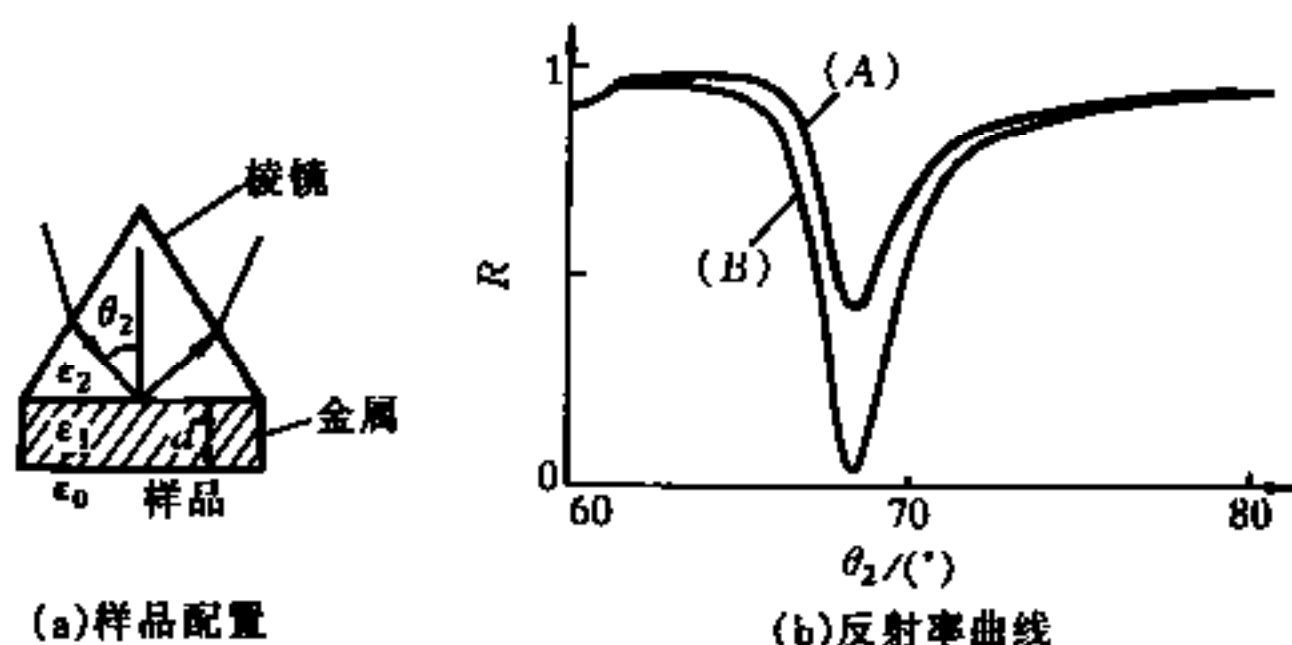


图 8.14 表面增强吸收实验

表 8.1 用于模拟计算的参数

	材 料	介电系数
棱镜	BK7	2.2952
金属	Ag	$-16.4 + i0.54$
样品(A)	纯水	1.77
样品(B)	受污染的水	$1.77 + i0.005$

注: $\lambda = 632.8\text{nm}$, $d = 44\text{nm}$

由图 8.14(b)可见,受污染样品的反射率低于纯水的反射率,这反映了污染物对光的吸收。另外,用没有镀金属膜的棱镜,采用全内反射方法,测量如图 8.15 所示的 $R - \theta$ 曲线,比较图 8.14(b)和图 8.15 中反射率的变化,吸收增强因子可达 70 倍。

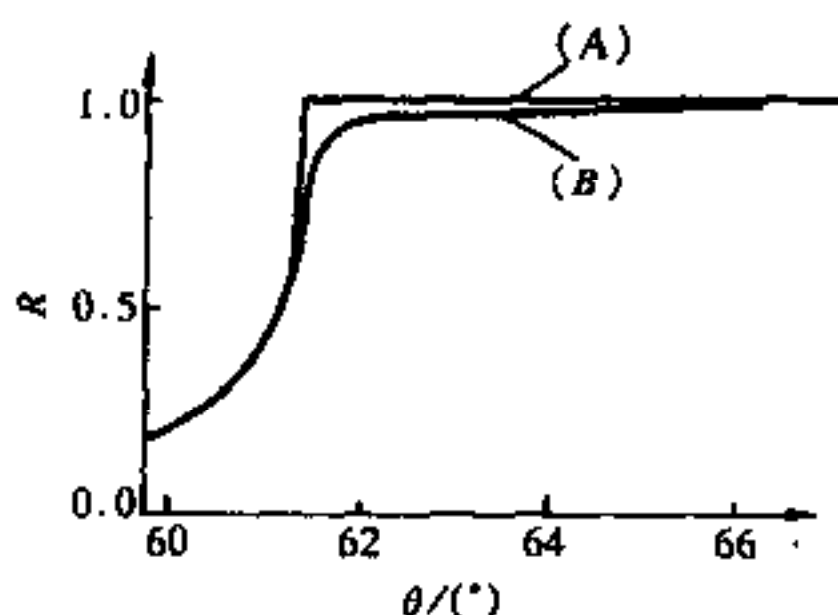


图 8.15 用全内反射方法
测量的 $R - \theta$ 曲线

8.4.4 表面等离子波增强的双光子激发的荧光^[8.10]

利用可见和近红外的激光,采用多光子激发技术可产生紫外荧光图像,这一技术已引起广泛的重视。这种技术不仅使感应的荧光远远偏离于激发光。同时,由于长波长激光的使用,避免了许多不希望产生的散射光的干扰。利用表面等离子波场的增强效应激发荧光的装置如图 8.16 所示。

图中,激发源是锁模掺钛蓝宝石激光器,产生波长为 800nm、脉冲宽度为 200fs、峰值功率为 50kW 的激发光重复频率为 76MHz。样品部分包括玻璃棱镜、50nm 厚的银膜和涂在银膜上的荧光试样,接收部分是增强型的图像 CCD。测量结果如图 8.17 所示。

利用全内反射方法,采用同样的实验装置和样品(银膜厚度为 0),两者比较表明,表面等离子波激发的荧光强度是全内反射方法的 90 倍。

表面等离子波增强的拉曼散射(SERS)与荧光增强的原理类似,故这里不再赘述。值得提出的是溶液中金属纳米微粒的使用,使表面增强拉曼散射的研究进入到一个新的高度^{[8.11][8.12]}。

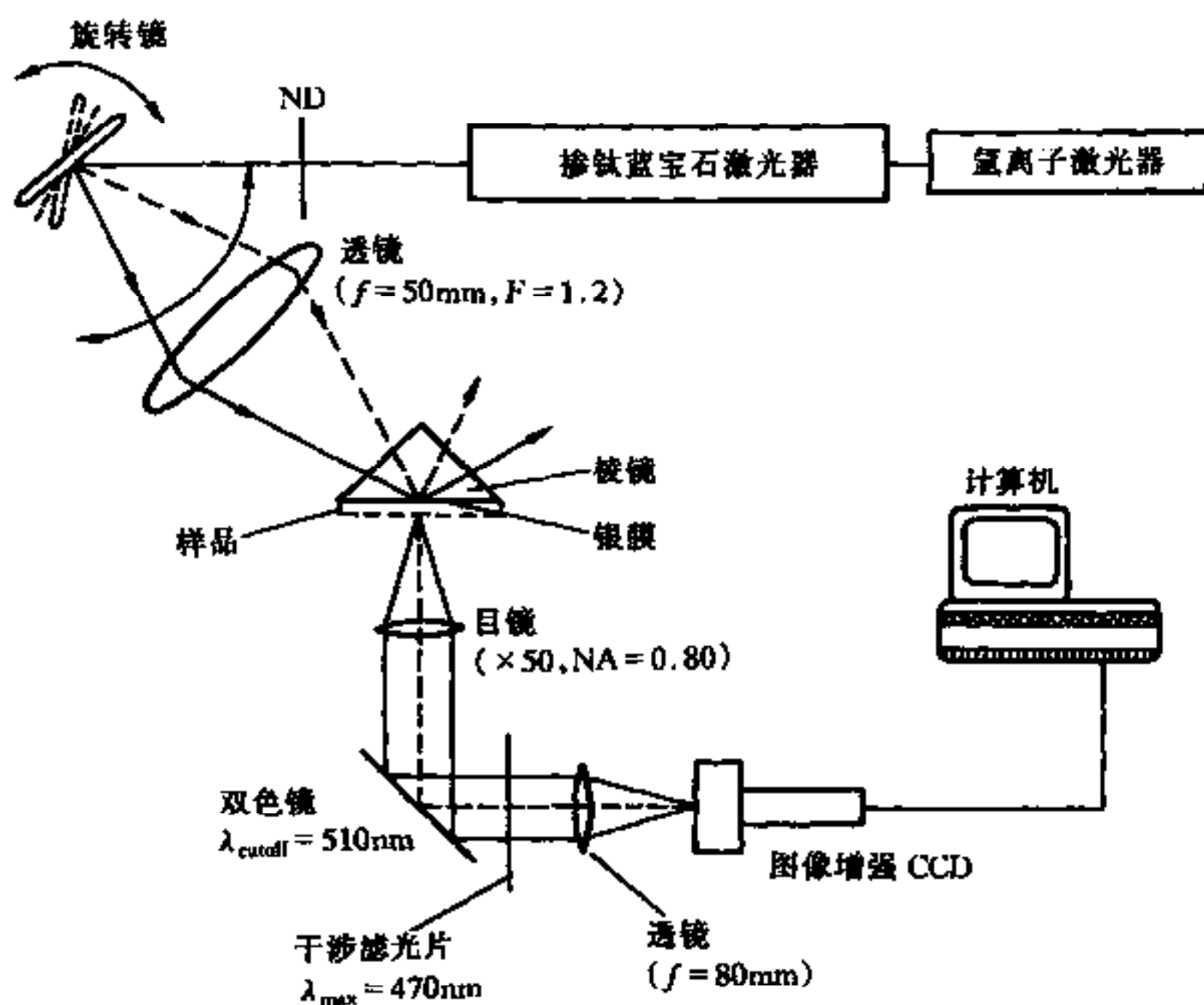


图 8.16 双光子激发荧光实验装置

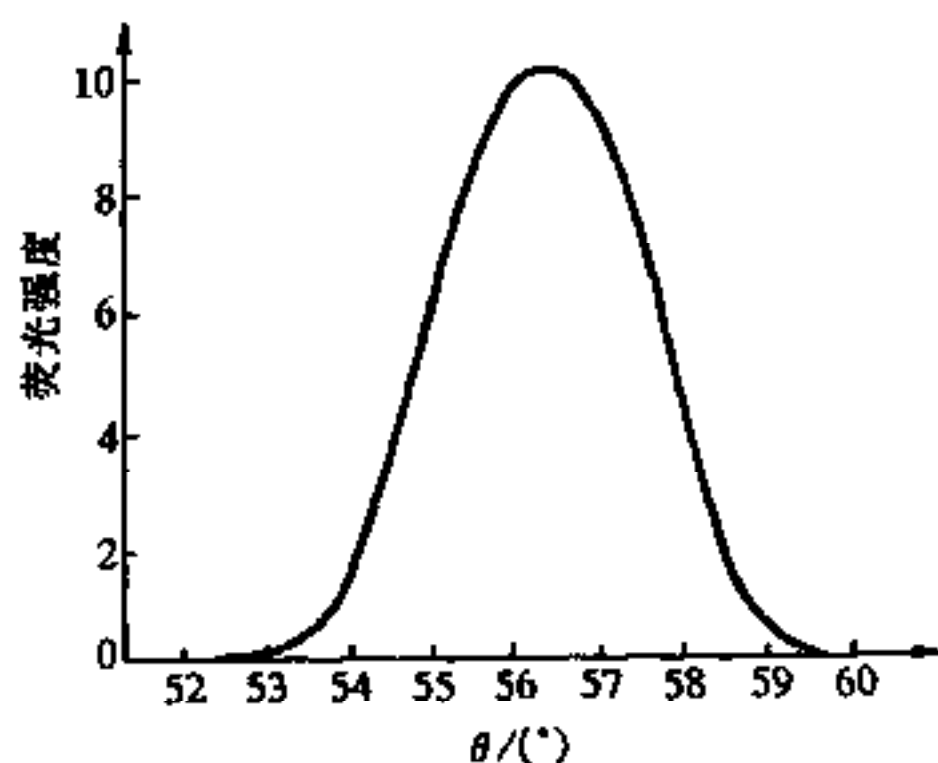


图 8.17 荧光强度随入射角 θ 变化的实验曲线

参考文献

- [8.1] A. Otto. Z. Physik, 1968. 216:398.
- [8.2] E. Kretschmann. Z. Physik, 1971, 248:313.
- [8.3] W. P. Chen, J. M. Chen. J. Opt. Soc. Am, 1981, 71(2):189~191.
- [8.4] F. Yang, Z. Cao, J. Fang, Appl. Opt. , 1988, 27(1):11~12.
- [8.5] D. Sarid, Phys. Rev. Lett. , 1981, 47(26):1927~1930.
- [8.6] R. T. Deck, D. Sarid. J. Opt. Soc. Am. , 1982, 72(12):1613~1617.
- [8.7] P. B. Daniels, et al. Sensors and Actuators, 1988, 15:11~18.
- [8.8] C. E. Berger, R. P. Kooyman, J. Greve. Rev. Sci Instrum. , 1994, 65(9):2829~2836.
- [8.9] H. Kano, S. kawata. Appl. Opt. , 1994, 33(22):5166~5170.
- [8.10] H. Kano, S. kawata. Opt. Lett. , 1996, 21(22):1848~1850.
- [8.11] X. Dou, et al. Appl. Spectrosc. , 1999, 53(2):133~139.
- [8.12] X. Dou, Y. M. Jung, Z. Cao, et al. Appl. Spectrosc. , 1999, 53(11):1440~1447.

第9章 金属包覆介质波导

9.1 引言

第8章中讨论了在金属和无吸收介质界面上传输的表面等离子波和在金属薄膜结构中传输的长程表面等离子波,并介绍了这两类表面波日益增长的应用前景。但由于金属介电常数虚部的作用,这两类表面波难以传输宏观意义上的距离。长程表面等离子波冠以“长程”两字,其意义是指传输距离大于光的波长^[9.1]。虽然最近有文章报道^[9.2],已观察到传输距离超过1mm的长程表面等离子波,但如此短的传输距离仍无法满足许多用于光通信目的的集成光学元器件的需要。在一些需要金属电极的集成光学元器件中,光仍以导波形式约束在无吸收的介质中传输,金属仅作为包覆层或外包覆层出现。这类结构称为金属包覆或金属外包覆介质波导。近年来,有机非线性材料由于具有大的非线性系数以及良好的光学性能等优点,已获得日益广泛的重视。有机聚合物电光波导器件和倍频波导等元器件正在不断地开发和研究之中。为获得高的电光系数和倍频系数,上述波导中的活性介质往往需要施加强电场,使介质极化;另外,为了光调制的目的,都需要在活性介质的两侧制备合适的金属电极。由于金属独特的光学性质,金属电极的制备将极大地改变介质波导的色散性质。

本章分别讨论非对称和对称金属包覆介质波导,然后分析有重要应用价值的金属包覆介质波导中的长程表面模。

9.2 非对称金属包覆介质波导

9.2.1 色散性质

非对称金属包覆介质波导又称为单面金属包覆介质波导,其结构

如图 9.1 所示。除了包覆层是金属之外,就波导本身的几何结构而言,非对称金属包覆介质波导与第 1 章中介绍的三层介质波导没有什么差别。因此,可以断定两者的模式本征方程在形式上应是完全一致的,即有

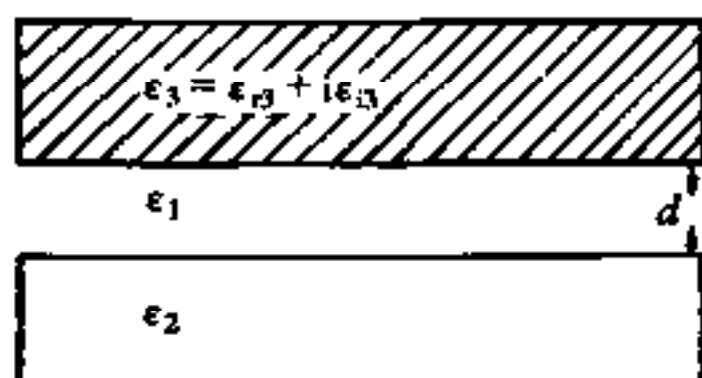


图 9.1 非对称金属包覆介质波导

$$\kappa_1 d = m\pi + \phi_{12} + \phi_{13} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (9.1)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \phi_{12}^{\text{TE}} &= \arctan\left(\frac{\alpha_2}{\kappa_1}\right) \\ \phi_{13}^{\text{TE}} &= \arctan\left(\frac{\alpha_3}{\kappa_1}\right) \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{12}^{\text{TM}} &= \arctan\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \cdot \frac{\alpha_2}{\kappa_1}\right) \\ \phi_{13}^{\text{TM}} &= \arctan\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_3} \cdot \frac{\alpha_3}{\kappa_1}\right) \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

而且有

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= (k_0^2 \epsilon_1 - \beta^2)^{1/2} \\ \alpha_2 &= (\beta^2 - k_0^2 \epsilon_2)^{1/2} \\ \alpha_3 &= (\beta^2 - k_0^2 \epsilon_3)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

采用第 8 章中的分析方法,先略去金属介电常数的虚部,在实数域中求解模式本征方程。即有

$$\epsilon_3 = \epsilon_{r3} < 0$$

且设 $|\epsilon_{r3}| > \epsilon_1 > \epsilon_2$ 。为讨论方便,首先给出典型的介质波导和金属覆盖介质波导的色散曲线,分别由图 9.2 和图 9.3 表示。

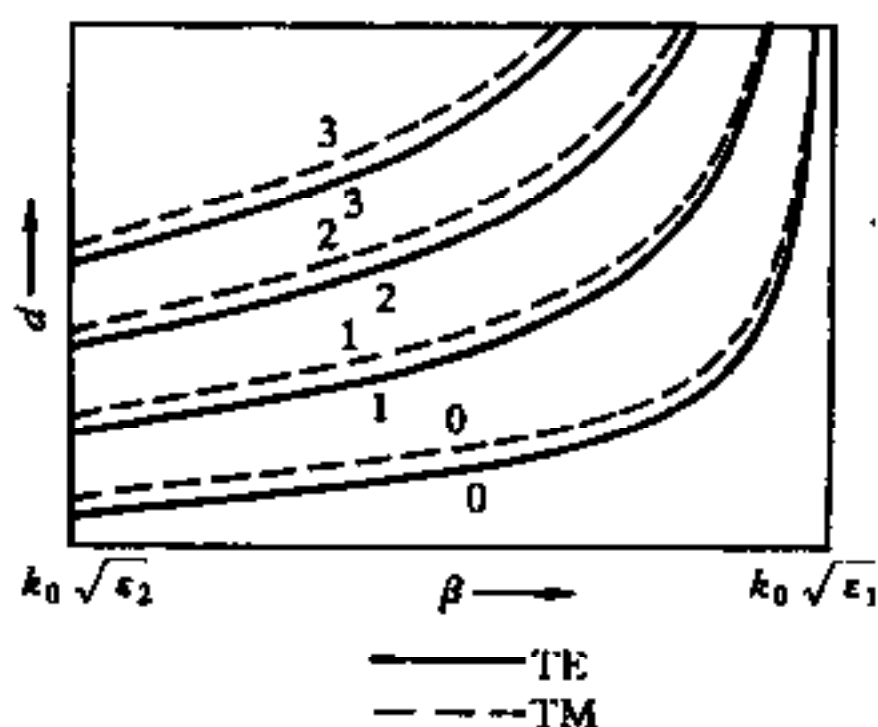


图 9.2 非对称介质波导的色散曲线

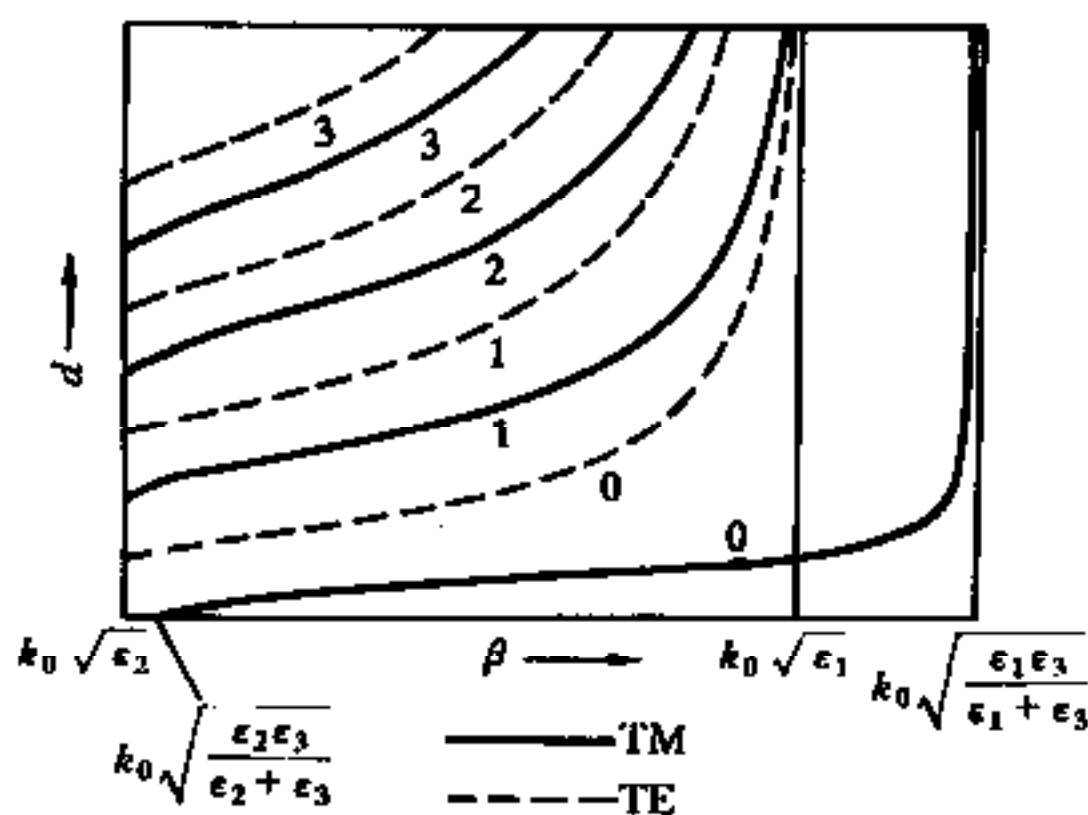


图 9.3 非对称金属覆盖介质波导的色散曲线

由以上两图可得如下性质：

1) 导膜有效折射率的存在范围为

$$\sqrt{\epsilon_2} < \beta/k_0 < \sqrt{\epsilon_1} \quad (9.5)$$

在介质波导中,由于薄膜必须以衬底为依托,因此介电常数为 ϵ_2 的介质不可能为空气。而对金属覆盖介质波导来说,金属可作为衬底使用,因此,介电常数为 ϵ_2 的介质可以是空气,即有 $\epsilon_2 = 1$ 。在这种情况下,导膜有效折射率的存在范围比一般的介质波导要大得多。

2) 由于 $\epsilon_3 < 0$, $\phi_{13}^{\text{TM}} < 0$, 可以证明, 对于确定的光频 ω 和薄膜厚度 d , 第 m 阶 TE 模所具有的 β 值小于同阶的 TM 模所具有的 β 值, 即 $\beta^{\text{TM}} > \beta^{\text{TE}}$, 这与全介质波导的情况正好相反。

3) 基于同样的理由, 与全介质波导相比, 在金属包覆介质波导中, 同阶的 TE 模和 TM 模的色散曲线分离程度较大。这个性质对制备波导偏振器件具有现实的意义。

4) 非对称金属包覆波导中的 TM_0 模是一个特殊的模式。由式 (9.1) 可得 TM_0 的模式本征方程为

$$\kappa_1 d = \arctan\left(\frac{\epsilon_1 \alpha_2}{\epsilon_2 \kappa_1}\right) + \arctan\left(\frac{\epsilon_1 \alpha_3}{\epsilon_3 \kappa_1}\right) \quad (9.6)$$

由方程 (9.6) 可得以下几个结论:

① 因为 $\epsilon_3 < 0$, 所以 TM_0 模是不会截止的。若令 $d = 0$, 则有

$$\arctan\left(\frac{\epsilon_1 \alpha_2}{\epsilon_2 \kappa_1}\right) = -\arctan\left(\frac{\epsilon_1 \alpha_3}{\epsilon_3 \kappa_1}\right) \quad (9.7)$$

立即可得

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = -\frac{\epsilon_3}{\epsilon_2} \quad (9.8)$$

由于 $d = 0$, 上式表示在金属与介质 2 界面处存在一个表面等离子波, 其传播常数为

$$\beta = k_0 \sqrt{\frac{\epsilon_2 \epsilon_3}{\epsilon_2 + \epsilon_3}} > k_0 \sqrt{\epsilon_2} \quad (9.9)$$

② 当 $\beta \rightarrow k_0 \sqrt{\epsilon_1}$ 时, 有 $\kappa_1 \rightarrow 0$ 。利用洛必大法则, 由方程 (9.6) 可求出此时临界厚度

$$d_c = -\frac{1}{k_0 \epsilon_1} \left[\frac{\epsilon_2}{\sqrt{\epsilon_1 - \epsilon_2}} + \frac{\epsilon_3}{\sqrt{\epsilon_1 - \epsilon_3}} \right] \quad (9.10)$$

③ 当 $d > d_c$ 时, 只有在 $\beta > k_0 \sqrt{\epsilon_1}$ 情况下, 方程 (9.6) 才有解。这时

$$\kappa_1 = i\alpha_1 \quad (9.11)$$

式中

$$\alpha_1 = (\beta^2 - k_0^2 \epsilon_1)^{1/2} \quad (9.12)$$

利用恒等式

$$\tan x = -i \tanh(ix) \quad (9.13)$$

方程(9.6)可改写为

$$\alpha_1 d = -\operatorname{artanh}\left(\frac{\epsilon_1 \alpha_2}{\epsilon_2 \alpha_1}\right) - \operatorname{artanh}\left(\frac{\epsilon_1 \alpha_3}{\epsilon_3 \alpha_1}\right) \quad (9.14)$$

当 $d \rightarrow \infty$ 时, 由上式可得

$$\frac{\epsilon_1 \alpha_3}{\epsilon_3 \alpha_1} = -1 \quad (9.15)$$

这表示在金属与介质 1 界面处的一个表面等离子波, 其传播常数为

$$\beta = k_0 \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_3}{\epsilon_1 + \epsilon_3}} > k_0 \sqrt{\epsilon_1} \quad (9.16)$$

综合上述分析, 可知 TM_0 模的传播常数的取值范围为

$$k_0 \sqrt{\frac{\epsilon_2 \epsilon_3}{\epsilon_2 + \epsilon_3}} < \beta < k_0 \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_3}{\epsilon_1 + \epsilon_3}} \quad (9.17)$$

若用曲线表示, 可作出如图 9.4 所示的关于 TM_0 模的色散曲线。

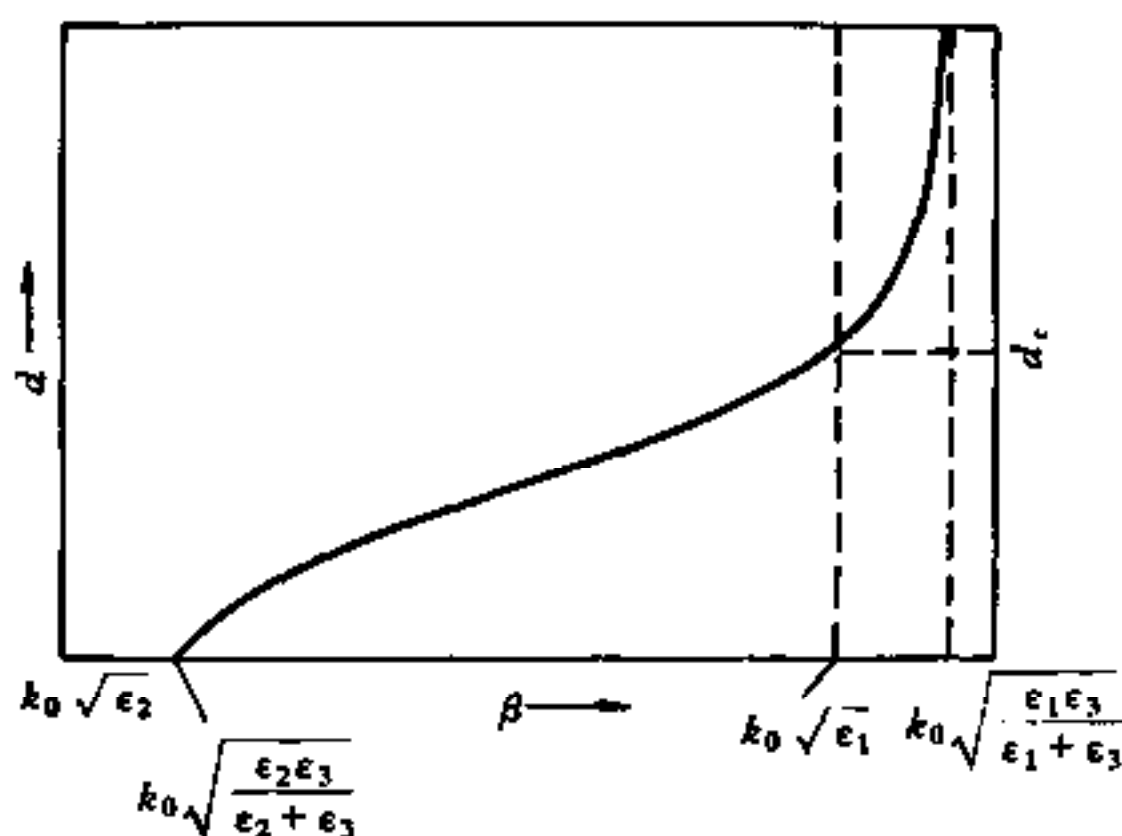


图 9.4 TM_0 模的色散曲线

总结成表格, 可得

表 9.1 非对称金属包覆波导中 TM_0 模的色散性质

d	β/k_0	波型
0	$\sqrt{\frac{\epsilon_2\epsilon_3}{\epsilon_2+\epsilon_3}}$	表面等离子波
$0 < d < d_c$	$\sqrt{\frac{\epsilon_2\epsilon_3}{\epsilon_2+\epsilon_3}} < \beta/k_0 < \sqrt{\epsilon_1}$	导 波
$d_c < d < \infty$	$\sqrt{\epsilon_1} < \beta/k_0 < \sqrt{\frac{\epsilon_1\epsilon_3}{\epsilon_1+\epsilon_3}}$	表面等离子波

奥托(Otto)和肖洛(Schler)^[9.3]用 ATR 方法测量了如图 9.5 所示结构的非对称金属包覆介质波导的色散关系。实验中所使用的人射光的波长为 $1\mu\text{m}$; 棱镜折射率 $n_p=1.8146$, 棱镜底面在 $1.33\times 10^{-6}\text{Pa}$ 的真空度下蒸镀 35nm 厚的铝膜, 在 $\lambda=1\mu\text{m}$ 时铝膜的介电常数 $\epsilon_3=-60$ (已略去虚部); 再在铝膜下面蒸镀 $3\mu\text{m}$ 厚的 LiF 薄膜, 形成棱镜耦合的铝—LiF—空气波导系统。实验与理论计算的结果由图 9.6 所示, 图中实线表示 TM 模, 虚线表示 TE 模。由图可见, 当取 LiF 薄膜的厚度 $d=2.95\mu\text{m}$, 并取 LiF 镀层在 $1\mu\text{m}$ 光波长下的折射率为 1.31 时, 实验结果和理论计算符合得很好。存在的误差可能是由于棱镜耦合(铝层不是无限厚)和略去铝的介电常数的虚部所引起。

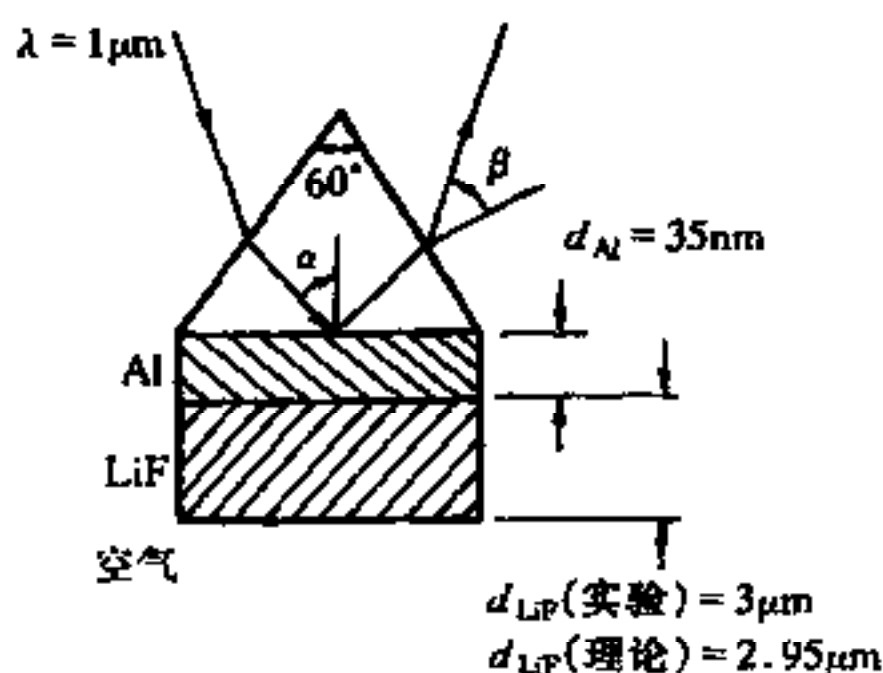


图 9.5 棱镜耦合单层金属包覆介质波导

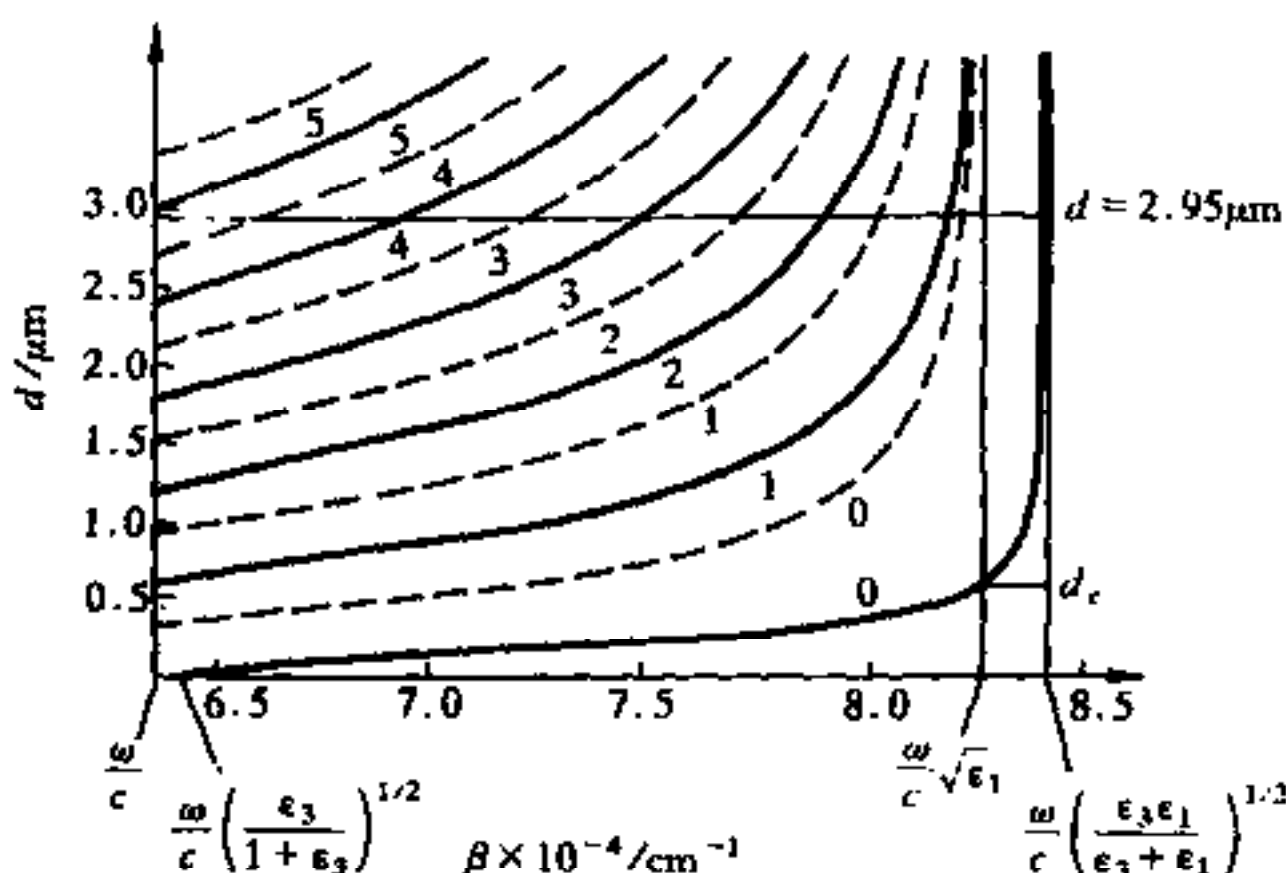


图 9.6 棱镜耦合单层金属包覆介质波导 βd 曲线

9.2.2 损耗

金属包覆介质波导的损耗是由金属介电常数的虚部引起的,由于实际金属的电导率是有限的,因此,对导体而言,电导率的有限与焦耳热是密切相关的,其结果是引起电磁能量的损耗。波导中的损耗由传播常数 β 的虚部来表征,而 β 的虚部是由金属的复介电常数所引起。由于问题的复杂性,一般需借助于计算机通过数值计算,才能得到复传播常数与薄膜厚度之间的色散关系。

加米诺(Kaminow)^[9.4]对几种具体的波导,利用牛顿法在复平面上求得了复超越方程(9.1)的数值解。图 9.7 示出了空气—介质—银波导结构的 β_i/k_0 对 $k_0 d$ 的色散关系(β_i 是传播常数的虚部, $\beta = \beta_r + i\beta_i$),从图中可见, TM_0 模的损耗与其他模式有很大的不同。

数值计算虽然可得到较为精确的结果,但缺乏清晰的物理意义。本节仍将沿用第 8 章中采用的一阶微扰理论来分析金属包覆介质波导的损耗,由于金属介电常数满足条件式(8.1),可以预计,这种近似将是十分有效的。

(1) TE 模 在考虑金属介电常数虚部情况下,非对称金属包覆介质波导 TE 模的模式色散方程为

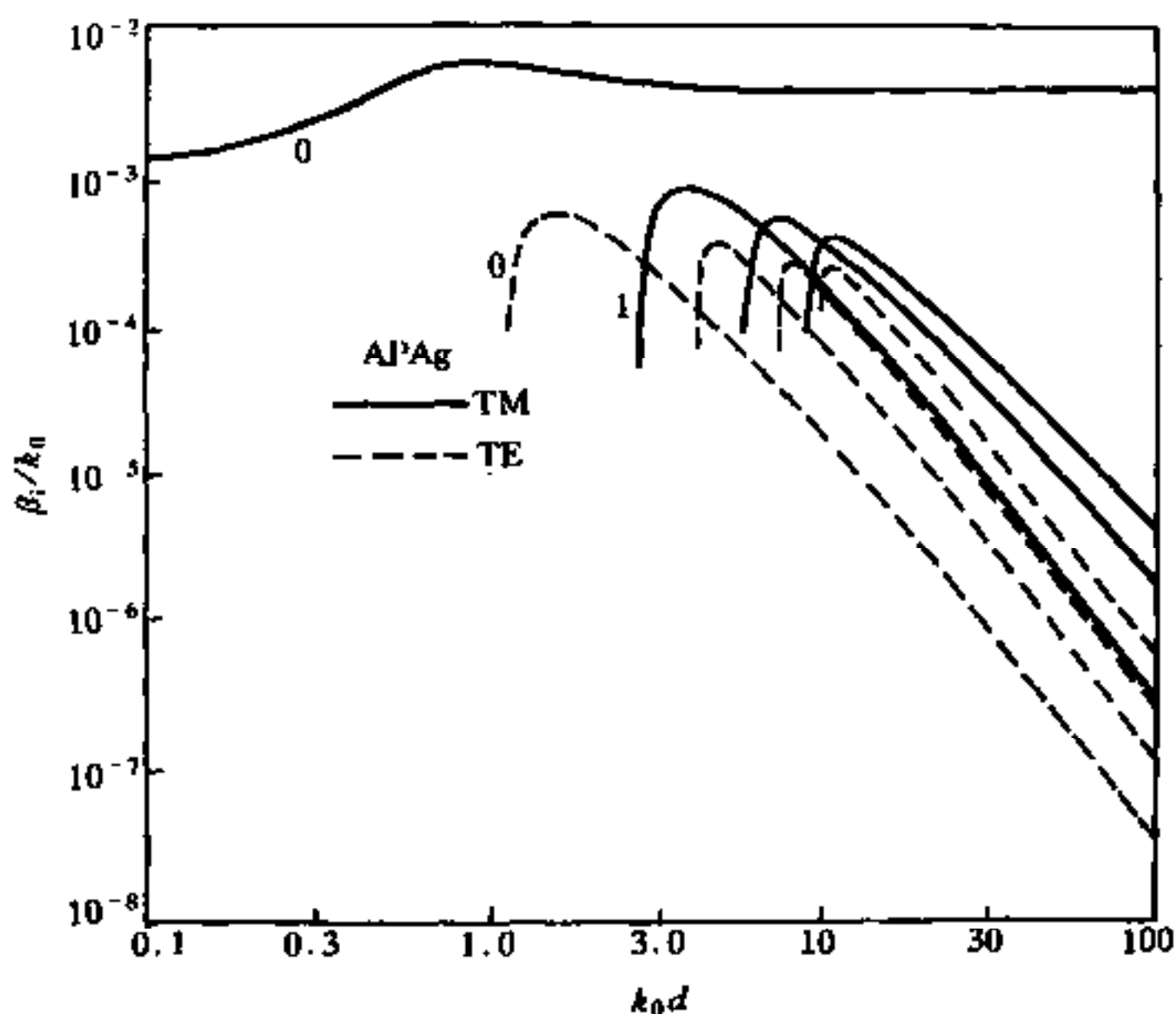


图 9.7 A-P-Ag 结构的 β_i/k_0 与 k_0d 的关系曲线

$$\kappa_1 d = m\pi + \arctan\left(\frac{\alpha_2}{\kappa_1}\right) + \arctan\left(\frac{\alpha'_3}{\kappa_1}\right) \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (9.18)$$

式中

$$\begin{aligned} \alpha'_3 &= \sqrt{\beta^2 - k_0^2(\epsilon_{r3} + i\epsilon_{r3})} \cong \\ & \sqrt{\beta^2 - k_0^2\epsilon_{r3}} - i\epsilon_{r3} \frac{k_0^2}{2\sqrt{\beta^2 - k_0^2\epsilon_{r3}}} = \\ & \alpha_3 - i\epsilon_{r3} \frac{k_0^2}{2\alpha_3} \end{aligned} \quad (9.19)$$

于是有

$$\arctan\left(\frac{\alpha'_3}{\kappa_1}\right) \cong \arctan\left(\frac{\alpha_3}{\kappa_1}\right) - i\epsilon_{r3} \frac{k_0^2}{2\alpha_3} \cdot \frac{\kappa_1}{\kappa_1^2 + \alpha_3^2} \quad (9.20)$$

因此, 方程(9.18)可改写成如下形式

$$\kappa_1 d = m\pi + \arctan\left(\frac{\alpha_2}{\kappa_1}\right) + \arctan\left(\frac{\alpha_3}{\kappa_1}\right) - i\epsilon_{\text{B}} \frac{k_0^2}{2\alpha_3} \cdot \frac{\kappa_1}{\kappa_1^2 + \alpha_3^2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (9.21)$$

构造一无损耗($\epsilon_3 = \epsilon_{\text{r}3}$)的理想波导,其模式本征方程由下式给出

$$\kappa_1^0 d = m\pi + \arctan\left(\frac{\alpha_2^0}{\kappa_1^0}\right) + \arctan\left(\frac{\alpha_3^0}{\kappa_1^0}\right) \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (9.22)$$

式(9.21)和(9.22)两式相减,并利用微分公式,可得微扰传播常数

$$\Delta\beta = i\epsilon_{\text{B}} \frac{k_0^2 \kappa_1^2}{2\alpha_3(\kappa_1^2 + \alpha_3^2)\beta d_{\text{eff}}} \quad (9.23)$$

式中波导有效厚度

$$d_{\text{eff}} = d + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} \quad (9.24)$$

由式(9.23)和(9.24)可知,微扰传播常数 $\Delta\beta$ 是一个纯虚数,说明金属介电常数虚部的引入仅影响波导的损耗特性,这个结论与金属薄膜波导的结果是一致的。

(2) TM 模 利用完全相同的步骤,可得非对称金属包覆介质波导相对于理想波导的微扰传播常数

$$\Delta\beta = i\epsilon_{\text{B}} \frac{2\alpha_3^2 + k_0^2 \epsilon_{\text{B}}}{2\alpha_3} \cdot \frac{\epsilon_1 \kappa_1^2}{(\epsilon_{\text{B}}^2 \kappa_1^2 + \epsilon_1^2 \alpha_3^2)\beta d_{\text{eff}}} \quad (9.25)$$

式中

$$d_{\text{eff}} = d + \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 (\kappa_1^2 + \alpha_2^2)}{\alpha_2 (\epsilon_2^2 \kappa_1^2 + \epsilon_1^2 \alpha_2^2)} + \frac{\epsilon_1 \epsilon_{\text{r}3} (\kappa_1^2 + \alpha_3^2)}{\alpha_3 (\epsilon_{\text{B}}^2 \kappa_1^2 + \epsilon_1^2 \alpha_3^2)} \quad (9.26)$$

由式(9.23)和(9.25)可见,随着薄膜厚度 d 的增加,损耗 $\Delta\beta$ 将下降。但对 TM_0 模来说,由于因子 $(\epsilon_{\text{B}}^2 \kappa_1^2 + \epsilon_1^2 \alpha_3^2)$ 将随 d 的增加而下降,当 $d \rightarrow \infty$ 时,有

$$\epsilon_{\text{B}}^2 \kappa_1^2 + \epsilon_1^2 \alpha_3^2 \rightarrow 0 \quad (9.27)$$

因此, $\Delta\beta$ 将不随 d 的增加而减小。图 9.8 是利用式(9.23)和(9.25)作出的 β_i/k_0 对 $k_0 d$ 的色散关系曲线。

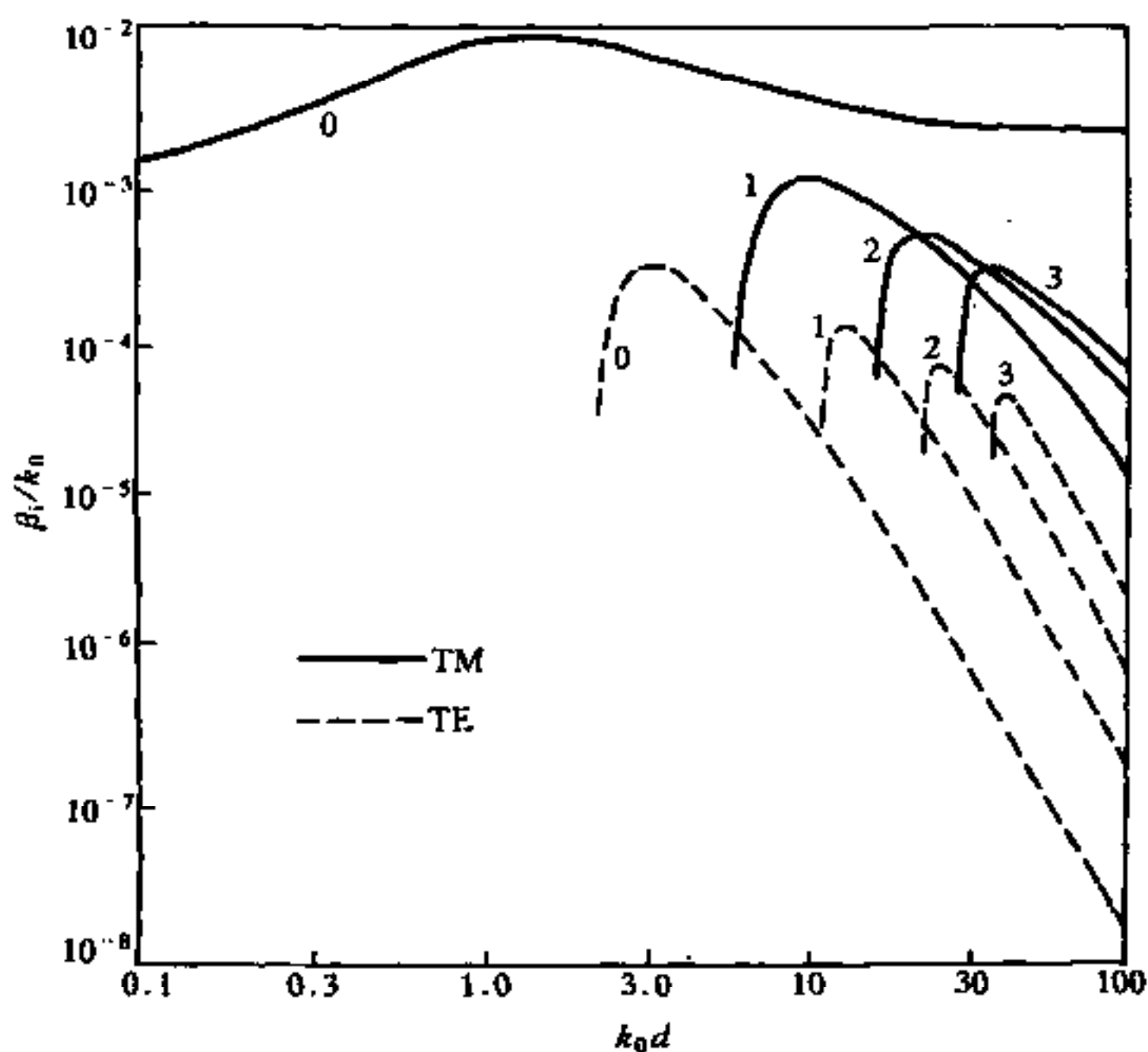


图 9.8 β_i/k_0 对 k_0d 的色散关系

9.3 对称金属包覆介质波导

9.3.1 色散性质

对称金属包覆介质波导又称为双面金属包覆介质波导,其结构如图 9.9 所示。利用式(9.1),并忽略金属介电常数的虚部,可得对称金属包覆介质波导的模式本征方程。

TE 模:

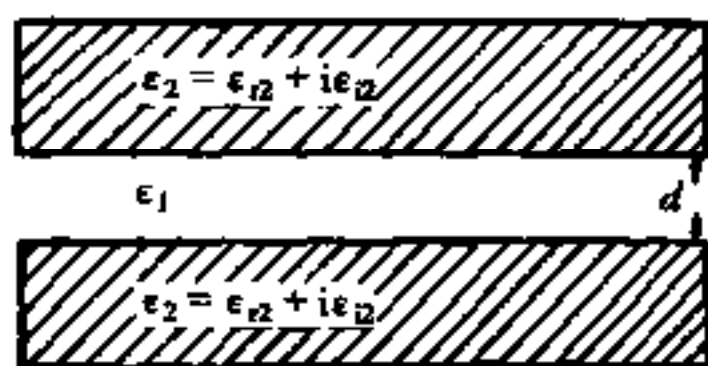


图 9.9 对称金属包覆介质波导

$$\kappa_1 d = m\pi + 2\arctan\left(\frac{\alpha_2}{\kappa_1}\right) \quad (9.28)$$

TM 模:

$$\kappa_1 d = m\pi + 2\arctan\left(\frac{\varepsilon_1 \alpha_2}{\varepsilon_2 \kappa_1}\right) \quad (9.29)$$

式(9.28)和(9.29)是实超越方程,从这两个方程可得到以下几个结论:

① 导模有效折射率的存在范围是

$$0 < \beta/k_0 < \sqrt{\varepsilon_1} \quad (9.30)$$

与式(9.5)比较,由式(9.30)表示的范围显然比任何全介质波导和非对称金属包覆介质波导导模有效折射率存在的范围都大。

② TM_0 和 TM_1 模是两个特殊的模式,下一节将进行专门的研究。

③ 利用式(9.28)和(9.29)可以证明,对于给定的光频 ω 和介质薄膜厚度 d ,第 m 阶 TE 模的 β 值小于同阶 TM 模的 β 值。此性质与单面金属包覆介质波导相同,但完全不同于全介质波导。

④ 除了 TM_0 模之外,每个模式都有截止厚度 d_c 。截止时,有 $\beta \rightarrow 0$,则根据式(9.28)和(9.29)可得

TE 模:

$$k_0 d_s^{\text{TE}} = \frac{m\pi}{\sqrt{\varepsilon_1}} + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon_1}} \arctan \sqrt{-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \quad (9.31)$$

TM 模:

$$k_0 d_s^{\text{TM}} = \frac{m\pi}{\sqrt{\varepsilon_1}} - \frac{2}{\sqrt{\varepsilon_1}} \arctan \sqrt{-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \quad (9.32)$$

显然,对同阶模有

$$d_s^{\text{TE}_m} > d_s^{\text{TM}_m} \quad (9.33)$$

而在全介质对称波导中,对同阶模有

$$k_0 d_s^{\text{TE}_m} = k_0 d_s^{\text{TM}_m} = \frac{m\pi}{\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}} \quad (9.34)$$

显然,对 $m=0$,有

$$d_s^{\text{TE}_0} = d_s^{\text{TM}_0} = 0$$

上式表明,在全介质对称波导中, TE_0 和 TM_0 模是不会截止的。

另外,利用恒等式

$$\arctan(|u|) = \frac{\pi}{2} - \arctan(|u|^{-1}) \quad (9.35)$$

则根据式(9.31)和(9.32)可知,在对称金属包覆介质波导中,显然存在如下关系

$$d_s^{TE_m} = d_s^{TM_{m+1}} \quad (9.36)$$

即第 m 阶 TE 模和第 $m+1$ 阶 TM 模的截止厚度是简并的。

9.3.2 TM_0 模和 TM_1 模

(1) TM_0 模 根据方程(9.29),在 $m=0$ 时,有

$$\kappa_1 d = 2 \arctan\left(\frac{\epsilon_1 \alpha_2}{\epsilon_2 \kappa_1}\right) \quad (9.37)$$

由上述方程,可得以下结论:

① 由于 $\epsilon_2 < 0$,故该方程在 $\beta/k_0 < \sqrt{\epsilon_1}$ 范围内无解。

② 当 $\beta/k_0 > \sqrt{\epsilon_1}$ 时,有 $\kappa_1 = i\alpha_1$,介质薄膜中的振荡场变为两个指数衰减场的叠加,于是方程(9.37)变为

$$\tanh\left(\frac{1}{2} \alpha_1 d\right) = -\frac{\epsilon_1 \alpha_2}{\epsilon_2 \alpha_1} \quad (9.38)$$

则当 $d \rightarrow \infty$ 时,有

$$-\frac{\epsilon_1 \alpha_2}{\epsilon_2 \alpha_1} = 1 \quad (9.39)$$

这是金属与介质 1 界面上的一个表面等离子波,有效折射率为

$$\beta/k_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} > \sqrt{\epsilon_1} \quad (9.40)$$

而当 $d \rightarrow 0$ 时,必有 α_1 和 $\alpha_2 \rightarrow \infty$,即有

$$\beta/k_0 \rightarrow \infty$$

由此得到 TM_0 模有效折射率的存在范围为

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} < \beta/k_0 < \infty \quad (9.41)$$

上式表明, TM_0 模的有效折射率处于导模有效折射率的存在范围之外。所以, 可以断定, TM_0 模是表面模。

(2) TM_1 模 利用式(9.35), 可将 TM_1 模的模式本征方程改写为

$$\kappa_1 d = 2 \arctan \left(- \frac{\epsilon_2 \kappa_1}{\epsilon_1 \alpha_2} \right) \quad (9.42)$$

显然, 在 $0 < \beta/k_0 < \sqrt{\epsilon_1}$ 范围内, 上述方程是有解的, 这时, TM_1 模是导模。容易求出, 当 $\beta/k_0 = 0$ 时, TM_1 模的截止厚度是

$$d_s^{TM_1} = \frac{2}{\kappa_0 \sqrt{\epsilon_1}} \arctan \sqrt{-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \quad (9.43)$$

而当 $\beta/k_0 = \sqrt{\epsilon_1}$ 时, 由式(9.42)可得 TM_1 模的临界厚度是

$$d_c^{TM_1} = - \frac{2\epsilon_2}{k_0 \epsilon_1 \sqrt{\epsilon_1 - \epsilon_2}} \quad (9.44)$$

在 $\beta/k_0 > \sqrt{\epsilon_1}$ 时, 有 $\kappa_1 = i\alpha_1$, 方程(9.42)可转化为

$$\tanh \left(\frac{1}{2} \alpha_1 d \right) = - \frac{\epsilon_2 \alpha_1}{\epsilon_1 \alpha_2} \quad (9.45)$$

对照第 8 章中的(8.38)和(8.39)两式可知, 分别由式(9.38)和(9.45)表示的 TM_0 模和 TM_1 模是介质薄膜与金属两个界面上表面等离子波的对称和反对称结合模式。

由式(9.45)可知, 当 $d \rightarrow \infty$ 时, 必有

$$- \frac{\epsilon_2 \alpha_1}{\epsilon_1 \alpha_2} = 1 \quad (9.46)$$

这时, 有效折射率

$$\beta/k_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} \quad (9.47)$$

根据式(9.40)和(9.47), 可见当 $d \rightarrow \infty$ 时, TM_0 模和 TM_1 模是简并的。从物理本质上看, 当 $d \rightarrow \infty$ 时, 两个界面上的表面等离子波不可能相互耦合, 各自成为自由的表面等离子波。由此可知 TM_1 模有效折射率的存在范围是

$$0 < \beta/k_0 < \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} \quad (9.48)$$

综合式(9.41)和(9.48),可知在对称金属包覆介质波导中,包括表面模在内的所有约束模式的有效折射率的存在范围是

$$0 < \beta/k_0 < \infty \tag{9.49}$$

图 9.10 示出了对称金属包覆介质波导的色散曲线,为了进行比较,图 9.11 示出了对称全介质波导的色散曲线。图中,实线表示 TM 模,虚线表示 TE 模。

把 TM_0 模和 TM_1 模的性质总结列于表 9.2。

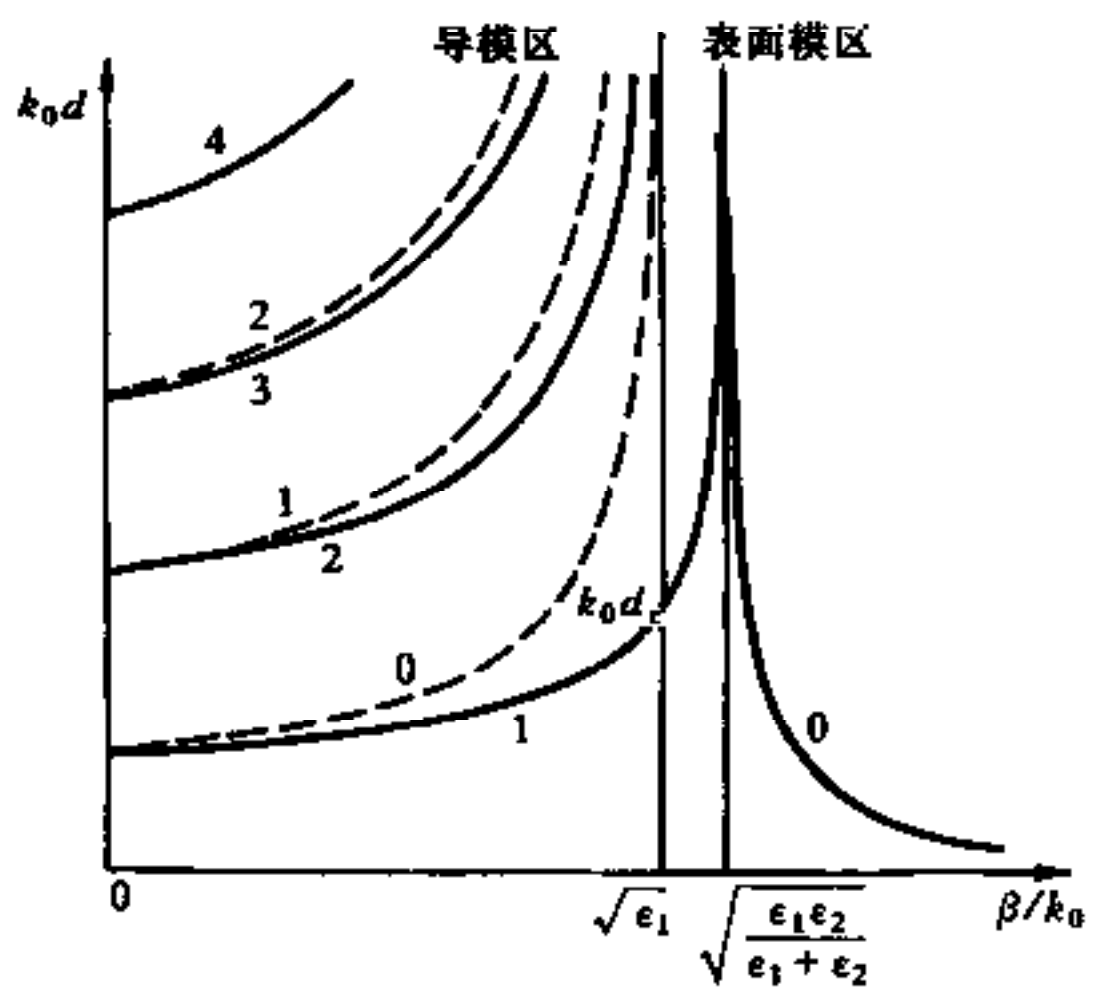


图 9.10 双层金属包覆介质波导的色散曲线

表 9.2 对称金属包覆介质波导中 TM_0 模和 TM_1 模的色散性质

β/k_0	d	波型
$0 < \beta/k_0 < \sqrt{\epsilon_1}$	$d_s < d < d_c$	TM_1 导波
$\sqrt{\epsilon_1} < \beta/k_0 < \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}}$	$d_s < d < \infty$	TM_1 表面等离子波
$\sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} < \beta/k_0 < \infty$	$0 < d < \infty$	TM_0 表面等离子波

文献[9.5]用角度扫描 ATR 方法,系统地研究了对称金属包覆介质波导中 TM_0 和 TM_1 两个表面模的色散性质。实验结果和理论计算

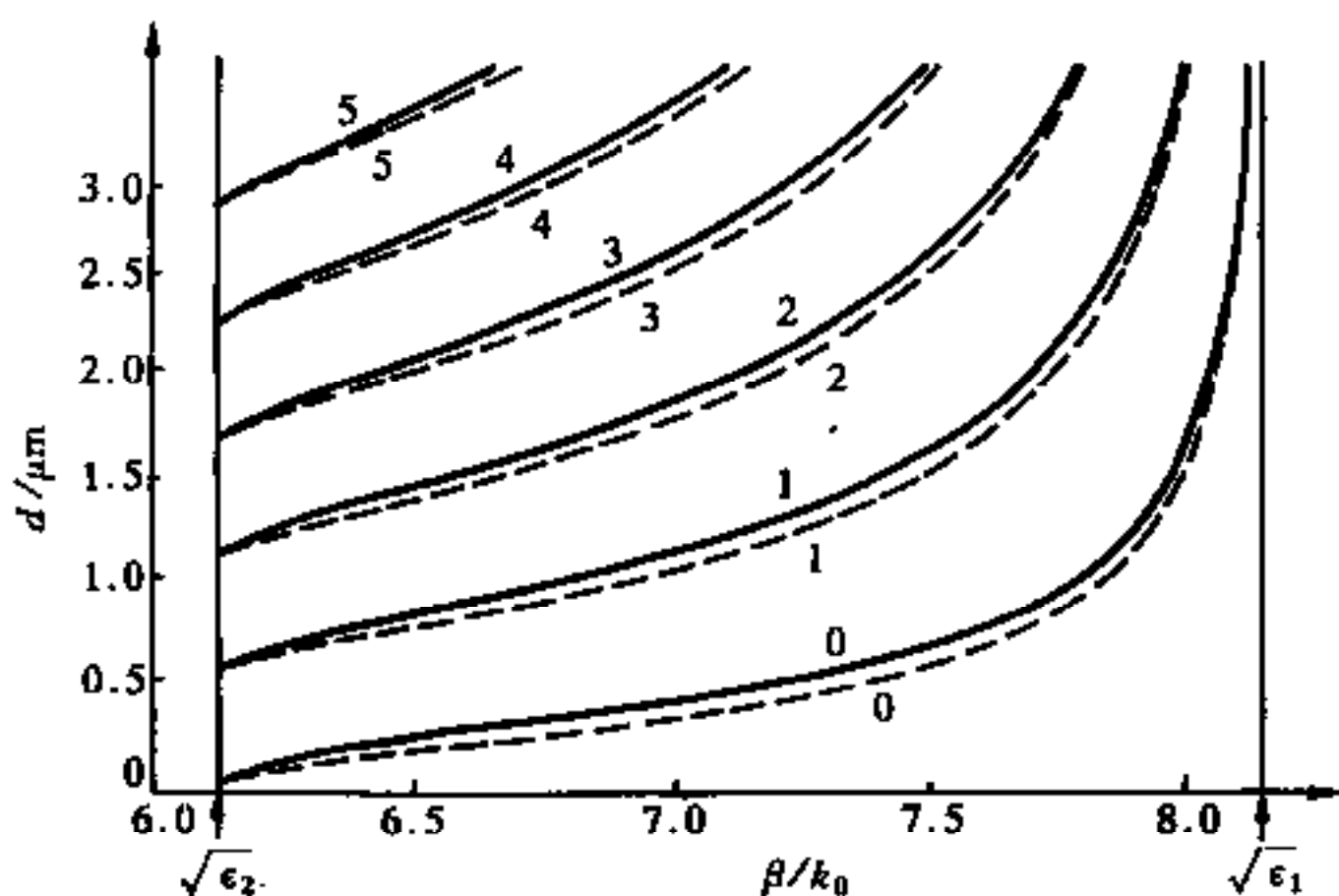


图 9.11 全介质对称波导的色散曲线

相符。实验样品是在高折射率的玻璃棱镜底面上依次蒸镀上 Ag—MgF₂—Ag 层而构成的。理论计算和实验结果指出,由于略去金属复介电常数的虚部和引入棱镜耦合来激发表面波所引起的理论计算的差异是很小的。由于蒸镀的 MgF₂ 层比较粗糙,使随后再蒸镀上去的银与粗糙的 MgF₂ 表面又生成一种金属陶瓷(cermet)薄层,该薄层使实验结果与理论计算之间发生差异。

以上结果是在略去了金属的复介电常数的虚部后得到的,这样,由色散方程得到的有效折射率 β/k_0 是一个实数,所以略去介电常数的虚部的结果是略去了 β/k_0 的虚部,这当然仅在 β/k_0 的实部远大于其虚部时才是可接受的结果。因此,关于 β/k_0 的下限是零的色散关系,实际上只是在远离 β/k_0 等于零的范围才是正确的。当 β/k_0 的实部接近于零时,其虚部的影响将大大增长,反过来也影响其实部,使色散关系有较大的变化。图 9.12 表示一个 Ag—P—Ag 对称金属包覆介质波导的 β_r/k_0 与 $k_0 d$ 关系的计算结果^[9.6]。从图可以看出,只有当 $\beta_r/k_0 < 0.1$ 时,其色散规律才有较大变化。这表明,在实际的波导结构中,只要介质层的厚度远离截止厚度,略去金属介电常数的虚部所得到的近似结果还是足够正确的。

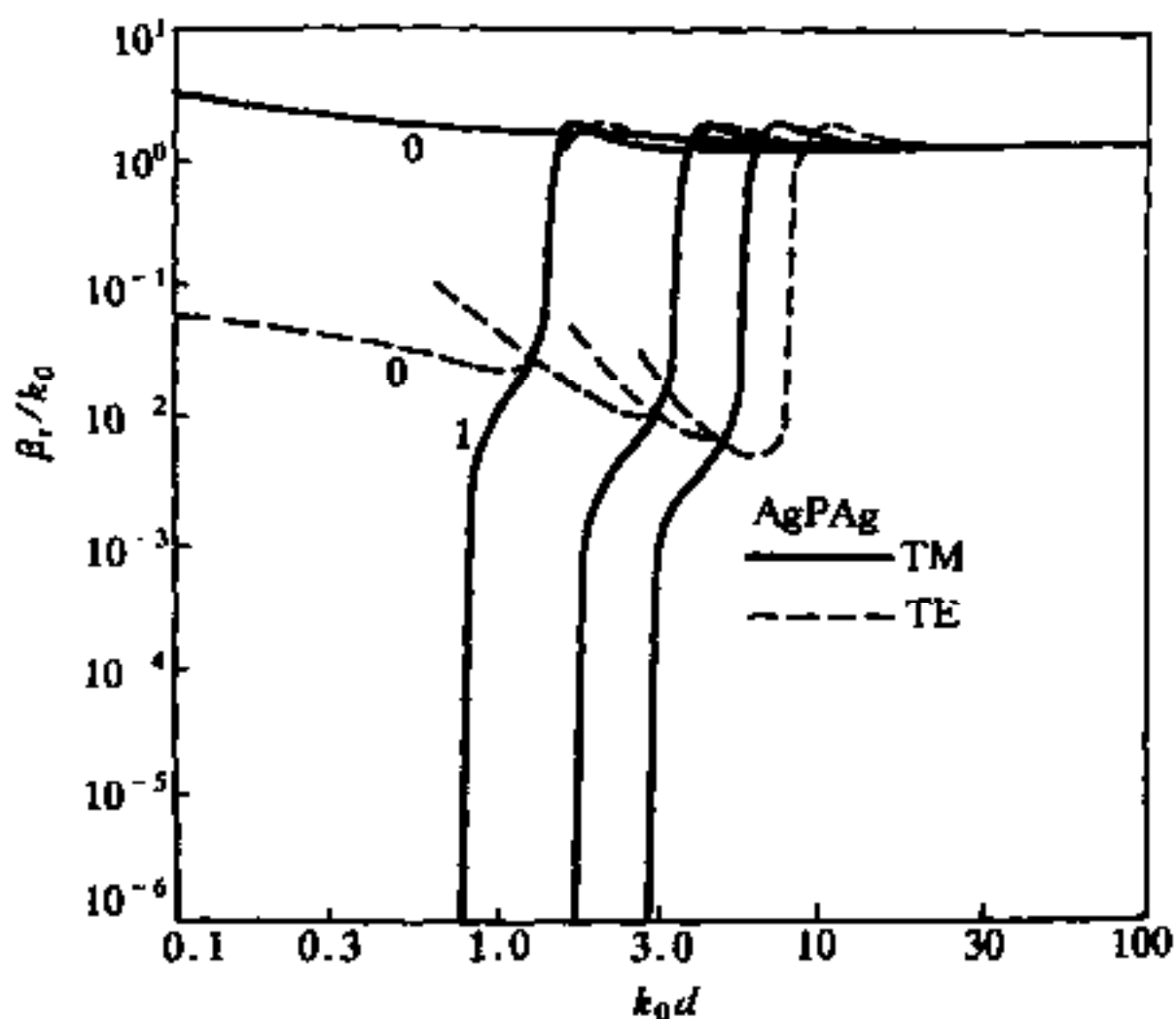


图 9.12 实际双层金属包覆介质波导中的 β_r/k_0 与 k_0d 的关系曲线

9.4 金属包覆介质波导中的长程表面波

9.2 讨论了非对称金属包覆介质波导的特性,这类波导中的 TM_0 模可转化为表面等离子波。在理论处理时,金属包覆层被看作半无穷大材料。当金属包覆层变为厚度有限的薄膜时,非对称金属包覆介质波导的特性将发生质的变化。以下讨论这类金属包覆四层波导结构。

9.4.1 色散性质

考虑图 9.13 所示的金属包覆四层波导结构,其中 ϵ_2 是金属薄膜的介电系数,而 ϵ_0 、 ϵ_1 和 ϵ_3 分别为衬底、波导薄膜和覆盖层介质的介电系数。对波导结构要求有 $\epsilon_1 > \epsilon_0$,并设定 $\epsilon_1 > \epsilon_3$ 。

为简单计,本节分析将忽略金属介电系数的虚部,并仅考虑具有特殊意义的 TM 波。根据电磁场波动方程,设该结构四个区域中的磁场分布为

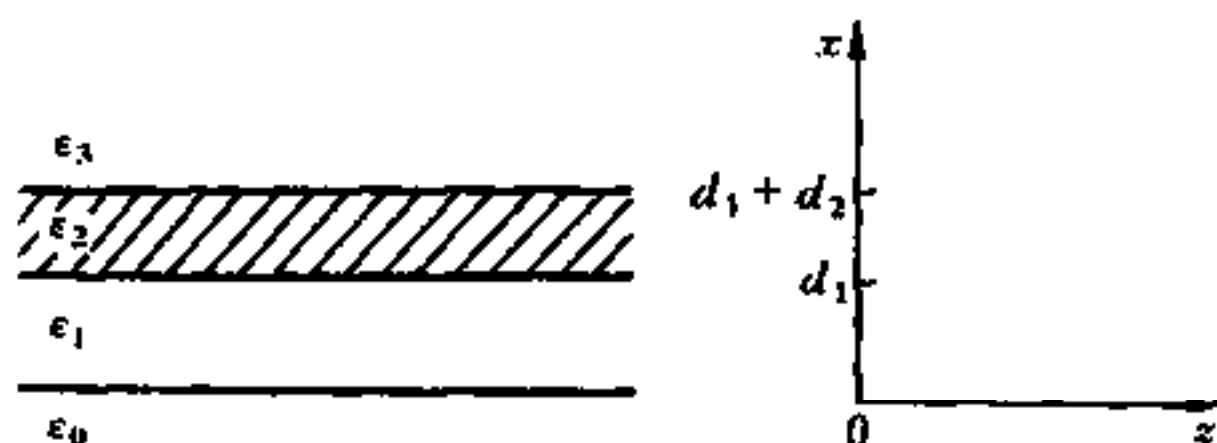


图 9.13 金属包覆四层波导结构

$$H_y(x) = \begin{cases} A_0 e^{a_0 x} & x < 0 \\ A_1 e^{-i\kappa_1(x-d_1)} + B_1 e^{i\kappa_1(x-d_1)} & 0 < x < d_1 \\ A_2 e^{a_2(x-d_1)} + B_2 e^{-a_2(x-d_1)} & d_1 < x < d_1 + d_2 \\ B_3 e^{-a_3(x-d_1-d_2)} & x > d_1 + d_2 \end{cases} \quad (9.50)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= (\beta^2 - k_0^2 \epsilon_0)^{1/2} \\ \kappa_1 &= (k_0^2 \epsilon_1 - \beta^2)^{1/2} \\ a_2 &= (\beta^2 - k_0^2 \epsilon_2)^{1/2} \\ a_3 &= (\beta^2 - k_0^2 \epsilon_3)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (9.51)$$

由转移矩阵理论, 可得以下矩阵方程

$$\begin{bmatrix} H_y(0) \\ \frac{1}{\epsilon_0} H'_y(0) \end{bmatrix} = M_1 M_2 \begin{bmatrix} H_y(d_1 + d_2) \\ \frac{1}{\epsilon_3} H'_y(d_1 + d_2) \end{bmatrix} \quad (9.52)$$

式中

$$M_1 = \begin{bmatrix} \cos(\kappa_1 d_1) & -\frac{\epsilon_1}{\kappa_1} \sin(\kappa_1 d_1) \\ -\frac{\kappa_1}{\epsilon_1} \sin(\kappa_1 d_1) & \cos(\kappa_1 d_1) \end{bmatrix} \quad (9.53)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \cosh(\alpha_2 d_2) & -\frac{\epsilon_2}{\alpha_2} \sinh(\alpha_2 d_2) \\ -\frac{\alpha_2}{\epsilon_2} \sinh(\alpha_2 d_2) & \cosh(\alpha_2 d_2) \end{bmatrix} \quad (9.54)$$

对于电磁能量主要集中于两个薄膜区域的模式(导模和表面模), $x < 0$ 和 $x > d_1 + d_2$ 区域应是指指数衰减场, 即 α_0 和 α_3 是实数; 又因为 $\epsilon_2 < 0$, 故 α_2 也是实数。而在 $0 < x < d_1$ 的波导薄膜区域, 存在两种可能的情况: ①对导模, 该区域内的场呈振荡形式, 即 κ_1 是实数; ②对表面模, 该区域内的场呈衰减形式, 即 κ_1 是纯虚数。

由方程(9.52), 可得导模的模式本征方程

$$\kappa_1 d_1 = m\pi + \arctan\left(\frac{\epsilon_1 \alpha_0}{\epsilon_0 \kappa_1}\right) - \arctan\left\{ \frac{\epsilon_1 \alpha_2}{|\epsilon_2| \kappa_1} \frac{1 - \exp\left[-2\alpha_2 d_2 + 2\operatorname{artanh}\left(\frac{|\epsilon_2| \alpha_3}{\epsilon_3 \alpha_2}\right)\right]}{1 + \exp\left[-2\alpha_2 d_2 + 2\operatorname{artanh}\left(\frac{|\epsilon_2| \alpha_3}{\epsilon_3 \alpha_2}\right)\right]} \right\} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (9.55)$$

对表面模,

$$\kappa_1 = i\alpha_1 \quad (9.56)$$

利用恒等关系

$$\arctan(ix) = i\operatorname{artanh}(x) \quad (9.57)$$

$$\arctan(x) = \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{x}\right) + i\frac{\pi}{2} \quad (9.58)$$

由方程(9.55), 可得表面模的模式本征方程

$$\alpha_1 d_1 = m\pi - \operatorname{artanh}\left(\frac{\epsilon_0 \alpha_1}{\epsilon_1 \alpha_0}\right) + \operatorname{artanh}\left\{ \frac{|\epsilon_2| \alpha_1}{\epsilon_1 \alpha_2} \frac{1 + \exp\left[-2\alpha_2 d_2 + 2\operatorname{artanh}\left(\frac{|\epsilon_2| \alpha_3}{\epsilon_3 \alpha_2}\right)\right]}{1 - \exp\left[-2\alpha_2 d_2 + 2\operatorname{artanh}\left(\frac{|\epsilon_2| \alpha_3}{\epsilon_3 \alpha_2}\right)\right]} \right\} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (9.59)$$

由于 α_1 和 d_1 都是实数, 因此方程(9.59)的左边是实数; 又因 $\epsilon_1 > \epsilon_0$,

进而有 $\alpha_0 > \alpha_1$, 于是可知 $\left(\frac{\epsilon_0 \alpha_1}{\epsilon_1 \alpha_0}\right) < 1$, 这说明方程(9.59)右边第一个反双曲正切函数的值是实数, 对于第二个反双曲正切函数, 由恒等式(9.58)可知, 该反双曲正切函数的宗量小于 1 (即反双曲正切函数的值是实数), 且当 $m=0$ 时, 方程(9.59)才成立, 由此可知, 金属包覆四层波导结构中, 只有 TM_0 模才有可能是表面模。

方程(9.59)可转化为如下形式:

$$d_2 = \frac{1}{2\alpha_2} \ln \left[\frac{(1+B)(A+1)}{(1-B)(A-1)} \right] \quad (9.60)$$

式中

$$A = \frac{\epsilon_1 \alpha_2}{|\epsilon_2| \alpha_1} \operatorname{artanh} \left[\alpha_1 d_1 + \operatorname{artanh} \left(\frac{\epsilon_0 \alpha_1}{\epsilon_1 \alpha_0} \right) \right] \quad (9.61)$$

$$B = \frac{|\epsilon_2| \alpha_3}{\epsilon_3 \alpha_2} \quad (9.62)$$

显然, 当 $d_2 \rightarrow \infty$ 时, 由式(9.60), 可得 $B \rightarrow 1$ 或 $A \rightarrow 1$,

当 $B \rightarrow 1$ 时, 由式(9.62), 得

$$\beta_1 = k_0 \sqrt{\frac{|\epsilon_2| \epsilon_3}{|\epsilon_2| - \epsilon_3}} \quad (9.63)$$

显然, β_1 是 $x = d_1 + d_2$ 界面上自由表面等离子波的传播常数。

当 $A \rightarrow 1$ 时, 式(9.61)变为

$$\alpha_1 d_1 = -\operatorname{artanh} \left(\frac{\epsilon_0 \alpha_1}{\epsilon_1 \alpha_0} \right) - \operatorname{artanh} \left(\frac{\epsilon_2 \alpha_1}{\epsilon_1 \alpha_2} \right) \quad (9.64)$$

对比式(9.14), 方程(9.64)是非对称金属包覆介质波导 TM_0 模的色散方程, 于是传播常数的取值范围为

$$k_0 \sqrt{\frac{|\epsilon_2| \epsilon_0}{|\epsilon_2| - \epsilon_0}} \leq \beta_2 < k_0 \sqrt{\frac{|\epsilon_2| \epsilon_1}{|\epsilon_2| - \epsilon_1}} \quad (9.65)$$

当 $\beta \rightarrow \infty$ 时, 由式(9.61)和(9.62)可得

$$A \rightarrow \frac{\epsilon_1}{|\epsilon_2|} < 1$$

$$B \rightarrow \frac{|\epsilon_2|}{\epsilon_3} > 1$$

由式(9.60)可知,此时 $d_2 \rightarrow 0$ 。即随着 d_2 的减小, TM_0 模的 β 值将从 $k_0 \sqrt{\frac{|\epsilon_2| \epsilon_1}{|\epsilon_2| - \epsilon_1}}$ 逐渐增加, TM_0 模的这一支将永远处于表面模区。但由于 A 和 B 总是大于零,所以由式(9.60)得不到 $d_2 \rightarrow 0$ 时传播常数 β 的有限解。

由导模的模式本征方程(9.55),可得

$$d_2 = \frac{1}{2\alpha_2} \ln \left[\frac{(1+B)(1+C)}{(1-B)(1-C)} \right] \quad (9.66)$$

式中

$$C = -\frac{|\epsilon_2| \kappa_1}{\epsilon_1 \alpha_2} \tan \left[\kappa_1 d_1 - \arctan \left(\frac{\epsilon_1 \alpha_0}{\epsilon_0 \kappa_1} \right) \right] \quad (9.67)$$

由于 C 可以小于零,故可由

$$(1+B)(1+C) = (1-B)(1-C)$$

得到 $d_2 \rightarrow 0$ 时传播常数 β 的有限解。即随着 d_2 的减小, TM_0 模的 β

值将从 $k_0 \sqrt{\frac{|\epsilon_2| \epsilon_3}{|\epsilon_2| - \epsilon_3}}$ 逐渐减小,最后进入导模区。由表面模转化为导

模的临界厚度 d_{2c} ,可在方程(9.55)中令 $\beta = k_0 \sqrt{\epsilon_1}$ 而得,

$$d_{2c} = \frac{1}{2\alpha_2} \ln \left[\frac{(1+B)(1+D)}{(1-B)(1-D)} \right] \quad (9.68)$$

$$D = \frac{|\epsilon_2|}{k_0 \sqrt{\epsilon_1 + |\epsilon_2|} \left[\epsilon_1 d_1 + \frac{\epsilon_0}{k_0 \sqrt{\epsilon_1 - \epsilon_0}} \right]} \quad (9.69)$$

根据以上分析,显然存在一个传播常数的禁域,即

$$k_0 \sqrt{\frac{|\epsilon_2| \epsilon_3}{|\epsilon_2| - \epsilon_3}} \leq \beta_2 < k_0 \sqrt{\frac{|\epsilon_2| \epsilon_1}{|\epsilon_2| - \epsilon_1}} \quad (9.70)$$

利用式(9.50)和有关的电磁场边界条件,有

$$\frac{B_2}{A_2} = \frac{1 - \frac{|\epsilon_2| \alpha_3}{\epsilon_3 \alpha_2}}{1 + \frac{|\epsilon_2| \alpha_3}{\epsilon_3 \alpha_2}} \cdot e^{2\alpha_2 d_2} \quad (9.71)$$

根据式(9.63), 已知当 $\beta = \beta_1$ 时, 有 $\frac{|\epsilon_2| \alpha_3}{\epsilon_3 \alpha_2} = 1$, 而且:

① 对 TM_0 模中传播常数大的一支, 永远有 $\beta > \beta_1$, 即对这一支, 永远有 $\frac{|\epsilon_2| \alpha_3}{\epsilon_3 \alpha_2} > 1$ 。于是由式(9.71)可知, $B_2/A_2 < 0$ 。所以这一支为金属中磁场反对称分布的模式。

② 对传播常数小的一支, 永远有 $\frac{|\epsilon_2| \alpha_3}{\epsilon_3 \alpha_2} < 1$, 即 $B_2/A_2 > 0$ 。所以这一支为金属中磁场对称分布的模式。

图 9.14 表示一个具体金属包覆四层波导结构 TM_0 模的 d_2 对 β/k_0 的色散曲线, 图中所用的参数为: $\epsilon_0 = 1.47^2$, $\epsilon_1 = 1.59^2$, $\epsilon_2 = -18.0$, $d_1 = 750\text{nm}$, $\lambda = 632.8\text{nm}$ 。

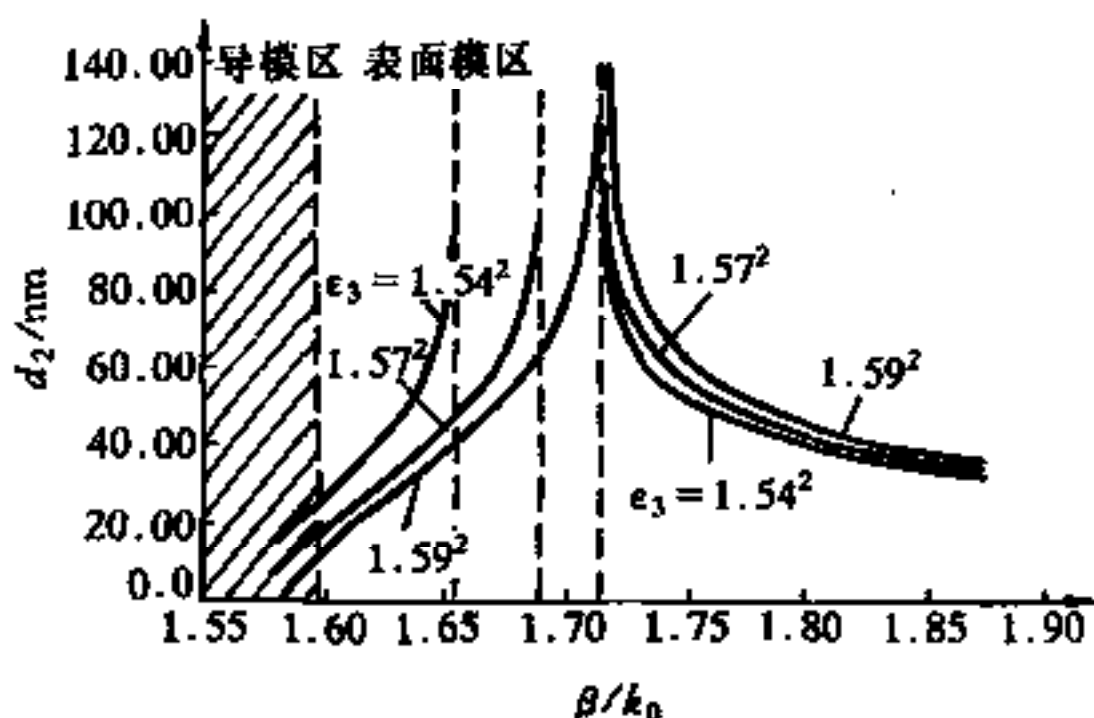


图 9.14 TM_0 模的有效折射率 β/k_0 对金属膜厚度 d_2 的关系曲线

9.4.2 讨论

实际上, 由于金属介电系数的虚部和耦合方式等影响, 表面等离子波的共振峰总有一定的宽度。在折射率近似匹配($\epsilon_1 \sim \epsilon_3$)条件下, 随着金属膜厚度 d_2 的减小, 两个金属—介质界面处的表面等离子波在金属膜中的迅衰场相互交叠而产生耦合。当 d_2 足够小(一般在 $10 \sim 30\text{nm}$)时, 对于磁场对称分布的模式, 由于在金属膜中的能量大大减小, 极大地降低了因金属吸收而产生的损耗, 表面等离子模转化为长程表面等离子模。这个模式的传播常数可随波导参数的变化在导模和

表面模两个区域中相互转化。薄膜的折射率分布往往是渐变的,所以在进一步的理论处理中,除应考虑金属介电系数虚部和耦合方式的影响,还须考虑折射率渐变的影响。

文献[9.7]对一个实际的棱镜耦合的金属包覆四层波导进行了理论计算,计算过程中考虑了金属介电系数的虚部和棱镜耦合的影响并利用多层近似(100层)特征矩阵法来表示介质薄膜的渐变折射率分布。计算结果表明, TM_0 模的理论色散曲线与图9.14的曲线是类似的,而且在较小的 d_2 和 ϵ_1 近似等于 ϵ_3 的匹配条件下,确实可由对称磁场分布的表面模得到损耗大大降低的长程表面等离子模。用ATR技术进行的实验研究得到了与理论计算符合得很好的结果。

从上述分析可知,这种结构中的长程表面等离子模的主要特点是,当用衰减全反射方法激励时,这种表面模的损耗较小,可得到尖锐的ATR共振峰;且其有效折射率与波导薄膜表面的折射率相当,可以很方便地通过逐渐改变匹配液的介电系数 ϵ_3 ,使长程表面等离子模的有效折射率在导模区和表面模区移动。众所周知,对多模渐变折射率波导,可通过测量对应波导模式的 m 线同步角,然后用逆WKB法计算该波导的折射率轮廓^[9.8]。但由于 m 线对应的导模有效折射率,往往处于离波导表面较远,因而实际上无法精确测量波导表面附近的折射率,而波导表面附近的折射率对波导的折射率轮廓的分析是至关重要的。因而利用上述办法难以得到精确的折射率轮廓,另外,对单模或少模渐变折射率波导,无法用上述方法解决。一般可以用改变波导参数或光波长等办法来提供几个可用于拟合计算的模式有效折射率。但是这样容易引进复杂的“色散”问题。根据金属包覆四层波导中长程表面等离子模的特点,精确测量波导表面的折射率以及单模或少模波导的折射率轮廓是完全可能的。

参考文献

- [9.1] D. Sarid. Phys. Rev. Lett, 1981, 47(26): 1927~1930.
- [9.2] M. Takabayashi, M. Haraguchi, M. Fukui. J. Opt. Soc. Am. B, 1995, 12: 2406~

2411.

- [9.3] A. Otto, W. Sholer. Opt. Commun. , 1971, 3(4): 254 ~ 256.
- [9.4] I. P. Kaminow, W. L. Mammel, H. P. Weber. Appl. Opt, 1974, 13(2): 396 ~ 405.
- [9.5] Y. Suematsu. Trans. Inst. Electron. Commun. Eng. Japan, 1972, 55-C: 98.
- [9.6] K. H. Rollke, W. Sholer. IEEE J. Quant. Electron. , 1977, QE-13(4): 141 ~ 145.
- [9.7] F. Yang, Z. Cao, et al. Appl. Opt. , 1986, 25(21): 3903 ~ 3908.
- [9.8] J. M. White, P. F. Heidrich. Appl. Opt. , 1976, 15(1): 151 ~ 155.

CHINA

CHINA



责任编辑 / 张福珍
封面设计 / 周 强

ISBN 7-313-02440-1



ISBN7-313-02440-1/TN·083

定价: 13.50 元

9 787313 024404 >